NOTWENDIGE UND HINREICHENDE KRITERIEN FÜR DIE ENTWICKELBARKEIT VON FUNKTIONEN IN GLEICHMÄSSIG KONVERGENTE FOURIERREIHEN NACH DEN EIGENFUNKTIONEN EINER KLASSE N-IRREGULÄRER EIGENWERTPROBLEME MIT ZERFALLENDEN RANDBEDINGUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von

MANFRED WOLTER
aus Neustadt/Holst.

Marburg/Lahn 1978

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

NOTWENDIGE UND HINREICHENDE KRITERIEN FÜR DIE ENTWICKELBARKEIT VON FUNKTIONEN IN GLEICHMÄSSIG KONVERGENTE FOURIERREIHEN NACH DEN EIGENFUNKTIONEN EINER KLASSE N-IRREGULÄRER EIGENWERTPROBLEME MIT ZERFALLENDEN RANDBEDINGUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt dem Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universität Marburg/Lahn

von

MANFRED WOLTER
aus Neustadt/Holst.

Marburg/Lahn 1978

Druck: Görich & Weiershäuser, Marburg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vom Fachbereich Mathematik der
Philipps-Universität Marburg/Lahn als

Dissertation angenommen am: 9. Juli 1978

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1978

Berichterstatter: Prof. Dr. Eberhard

Mitberichterstatter: Prof. Dr. Gromes

Inhaltsverzeichnis

		Seite
§ 1	Einleitung	1
§ 2	Formulierung des Rand-Eigenwertproblems	4
§ 3	Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen	11
§ 4	Notwendige Kriterien für die Entwickelbarkeit von Funktionen	15
§ 5	Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion	19
§ 6	Eine Theorie "$\tilde{N}^{-1}m$ - analytischer Funktionen"	25
§ 6.1.	$\tilde{N}^{-1}m$ - Basis	25
§ 6.2.	Taylorformel	29
§ 6.3.	Taylorreihe	31
§ 6.4.	Lokaler Entwicklungssatz	32
§ 6.5.	Verallgemeinerte Basis: die $N_{x_o}^{-1}m$ - Basis	34
§ 6.6.	Verallgemeinerte Taylorformel	36
§ 6.7.	Verallgemeinerte Taylorreihe	39
§ 6.8.	Verallgemeinerter lokaler Entwicklungssatz	40
§ 6.9.	Identitätssatz	42
§ 6.10.	Globale Entwicklungssätze	43
§ 7	Hinreichende Kriterien für die Entwickelbarkeit von Funktionen: Entwicklungssätze	48
	Zusammenfassung der notwendigen und hinreichenden Kriterien	59
§ 8	Weitere Beweise und Hilfssätze	62
Literaturverzeichnis		134

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546006_0017

§ 1 Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden das Verhalten der Eigenwerte, der Eigenfunktionen und der Greenschen Funktion $G(x,\xi,\lambda)$ sowie die Entwicklungen nach Eigenfunktionen einer Klasse von N-irregulären Rand-Eigenwertproblemen

$$(1.1) \qquad M\,y = \lambda\, N\,y$$

mit zerfallenden Randbedingungen untersucht. Die Differentialoperatoren M und N seien dabei durch gewöhnliche lineare Differentialausdrücke $m(y)$ bzw. $n(y)$ von n-ter bzw. p-ter Ordnung $(n-1 \geq p)$ und durch sog. N-irreguläre zerfallende Randbedingungen

$$(1.2) \qquad U_j(y) = 0 \quad (j = 1,\ldots,m) \qquad \text{in } x = 0$$

$$(1.3) \qquad U_j(y) = 0 \quad (j = m+1,\ldots,n) \qquad \text{in } x = 1$$

über dem Intervall $[0,1]$ erzeugt.

Den Zugang zu den Entwicklungssätzen liefern bekanntlich asymptotische Abschätzungen der Greenschen Funktion; hierzu wiederum werden Abschätzungen eines Fundamentalsystems der zugrundeliegenden Differentialgleichung

$$(1.4) \qquad m(y) = \lambda\, n(y)$$

benötigt. In [7] gelangen Eberhard und Freiling derartige Abschätzungen und zudem asymptotische Abschätzungen der Eigenwerte von (1.1) im Falle N-regulärer Randbedingungen. Die Abschätzungen entsprechen in ihrer Güte denjenigen von Birkhoff-Stone für N = I (d.h. I-regulär bedeutet regulär im Birkhoffschen Sinne). In einer weiteren Arbeit [8] oben genannter Autoren werden Entwicklungen nach Eigenfunktionen von (1.1) ebenfalls für N-reguläre Randbedingungen untersucht.

Das Eigenwertproblem (1.1) mit N-irregulären und zerfallenden Randbedingungen (1.2),(1.3) ist bisher nur für N = I im Hinblick auf Entwicklungssätze befriedigend gelöst worden, und zwar von Eberhard in [1],[2],[3] und [9] und von Kromow in [12].

Die vorliegende Arbeit weist nach, daß die Klasse der Funktionen $f(x)$, die in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen des Eigenwertproblems (1.1) mit N-irregulären und zerfallenden Randbedingungen entwickelt werden kön-

nen, unter bestimmten zusätzlichen Voraussetzungen an das Eigenwertproblem (1.1) durch die beiden folgenden Bedingungen charakterisiert wird:

$$(1.5) \qquad U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0 \; ; \quad (j = 1,\dots,m;\ q = 0,1,2,\dots)$$

$$(1.6) \qquad \left|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right| \leq \tilde{C}^{q(n-p)+r}\,(q(n-p)+r)! \; ; \begin{cases} q = 0,1,2,\dots \\ r = 0,\dots,n-1 \end{cases}^{1)}$$

mit von q,r unabhängiger Konstante $\tilde{C}(f)$ und für x aus einem gewissen abgeschlossenen Teilintervall von $[0,1]$.

Darin ist $\tilde{N}$ der Operator, der erzeugt wird durch den Differentialausdruck n(y) und die Randbedingungen $U_j(y) = 0$ $(j = m-p+1,\dots,m)$.

Dazu wird in § 2 das Eigenwertproblem so formuliert, daß die Voraussetzungen späteren Bedürfnissen bereits angepaßt sind. Im wesentlichen wird gefordert, daß das Eigenwertproblem nicht ausgeartet ist. Dann gelingen asymptotische Abschätzungen der Eigenwerte und Eigenfunktionen mit Hilfe der oben erwähnten Abschätzung eines Fundamentalsystems der Differentialgleichung (1.4). Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizientenfunktionen in den Differentialausdrücken m(y), n(y) holomorph in $|z| \leq 1$ sind, wird als notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion f(x) in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen des Eigenwertproblems (1.1) auf $[x_0,x_1] \subset [0,1]$ entwickelbar ist, nachgewiesen, daß f(x) in einem bestimmten Polygon um das Intervall $[0,x_1]$ holomorph ist, dessen Eckenzahl gleich m-p+1 ist und dessen Größe von dieser Eckenzahl und von der Differenz $2m-n$ der Anzahl der Randbedingungen bei $x = 0$ und $x = 1$ abhängt. Es ist am größten, wenn sich nur eine Randbedingung auf $x = 1$, alle anderen auf $x = 0$ beziehen, d.h. wenn $n-m = 1$ in (1.2),(1.3). Diese notwendige Bedingung hat für $N = I$ bereits Eberhard in [2] und [3] erkannt.[2)] Sind die Koeffizientenfunktionen beliebig oft differenzierbar, so folgt ebenfalls als notwendige Bedingung für eine Entwickelbarkeit in obigem Sinne, daß f(x) die Bedingungen (1.5), (1.6) erfüllen muß, Bedingungen, die sich schließlich in § 7 auch als hinreichend erweisen, wenn man von den Lösungen von $n(y) = 0$ noch eine Wachstumsbeschränkung wie in (1.6) fordert.

Zunächst jedoch wird die Greensche Funktion in § 5 direkt und asymptotisch abgeschätzt. Aus der asymptotischen Darstellung liest man ab, daß $G(x,\xi,\lambda)$ als Funktion von λ sich völlig verschieden

1) $q = r = 0$ ausgenommen.

2) Eberhard erhielt ein kleineres, regelmäßiges Polygon um $z = 0$.

verhält, je nachdem die Randbedingungen N-regulär oder N-irregulär sind. Im Gegensatz zum N-regulären bleibt sie im N-irregulären Fall nicht beschränkt für $x > \xi$, sondern wächst exponentiell mit λ. Dies Verhalten der Greenschen Funktion zwingt, neben den Anfangsbedingungen (1.5) eine analytische Eigenschaft (1.6) von der zu entwickelnden Funktion f(x) zu verlangen. In [10] hat Fage eine Theorie operator-analytischer Funktionen aufgestellt, die es Kromow in [11] ermöglichte, im Falle N = I operator-analytische Funktionen in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen eines irregulären Eigenwertproblems (1.1) mit zerfallenden Randbedingungen zu entwickeln, falls nur noch (1.5) erfüllt ist. In Anlehnung an die Theorie von Fage wird in § 6 eine Theorie "$\tilde{N}^{-1}m$ - analytischer Funktionen" aufgebaut (dies sind Funktionen, die der Abschätzung (1.6) genügen); diese Theorie liefert einen globalen Entwicklungssatz Taylorscher Art um x = 0 nach einer "$\tilde{N}^{-1}m$ - Basis", definiert über die Differentialausdrücke in (1.4), wenn man, wie bereits erwähnt, auch die Lösungen von n(y) = 0 als $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen voraussetzt (dies ist im übrigen für reell-analytische Koeffizientenfunktionen stets erfüllt ist); unter dieser zusätzlichen Bedingung an die Differentialausdrücke in (1.4) ist analytische Fortsetzbarkeit für $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen möglich. Diese Wachstumsbeschränkung erübrigt sich auch, wenn $m\tilde{N}^{-1}$ ein reiner Differentialausdruck ist.

Analog zur Aussage von Kromow erhält man dann nach dem gleichen Verfahren für derartige **verallgemeinerte Taylorentwicklungen** unter der Voraussetzung (1.5) gleichmäßig konvergente Fourierentwicklungen nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems (1.1). Es wird also gezeigt, daß die Bedingungen (1.5),(1.6) für Entwicklungen in obigem Sinne nach den Eigenfunktionen einer Klasse von N-irregulären Rand-Eigenwertproblemen (1.1) mit zerfallenden Randbedingungen sowohl notwendig, als auch hinreichend sind. Falls die oben erwähnte verallgemeinerte Taylorentwicklung einer auf [0,1] $\tilde{N}^{-1}m$ - analytischen Funktion f(x) auf ganz [0,1] konvergiert[1] und wenn zusätzlich zu (1.5) noch $U_j(f) = 0$ (j = m+1, ...,n) in x = 1 erfüllt ist, so stellt die Fourierentwicklung die Funktion f(x) auf ganz [0,1] dar.

Damit umfassen die in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnisse die entsprechenden von Eberhard und Kromow.

Da die Beweise zum Teil sehr umfangreich sind, sind sie bis auf wenige Ausnahmen in § 8 zusammengefaßt.

[1] Es wird gezeigt, daß dies immer dann gilt, wenn f(z) und die Koeffizientenfunktionen in $|z| \leq 1$ holomorph sind.

§ 2 Formulierung des Rand-Eigenwertproblems

Es wird das Rand-Eigenwertproblem $My = \lambda\, Ny$ untersucht, das erzeugt wird durch die Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$m(y) = \lambda\, n(y) \tag{2.1}$$

mit den linearen gewöhnlichen Differentialausdrücken

$$m(y) := y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x) y^{(n-i)} \tag{2.2}$$

$$n(y) := y^{(p)} + \sum_{i=1}^{p} g_i(x) y^{(p-i)} \tag{2.3}$$

$$0 \leq p \leq n-1 \tag{2.4}$$

auf einem kompakten Intervall der reellen Achse, o.B.d.A. $[0,1]$, und mit auf $[0,1]$ beliebig oft differenzierbaren Koeffizientenfunktionen, und durch die linear unabhängigen Randbedingungen

$$U_j(y) = 0\,, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{2.5}$$

in der zerfallenden und o.B.d.A. normierten Form:

$$U_j(y) \equiv y^{(k_j)}(0) + \sum_{i=0}^{k_j-1} \alpha_{ji}\, y^{(i)}(0)\,; \quad (j = 1,\ldots,m) \tag{2.6}$$

$$U_j(y) \equiv y^{(k_j)}(1) + \sum_{i=0}^{k_j-1} \beta_{ji}\, y^{(i)}(1)\,; \quad (j = m+1,\ldots,n) \tag{2.7}$$

$$n-1 \geq k_1 > \ldots > k_m \geq 0 \tag{2.8}$$

$$n-1 \geq k_{m+1} > \ldots > k_n \geq 0 \tag{2.9}$$

mit

$$0 < m < n \quad (\text{o.B.d.A. sei } \tfrac{n}{2} \leq m < n)\,. \tag{2.10}$$

Wir setzen

$$\lambda = \varrho^{\,n-p} \tag{2.11}$$

und betrachten in der komplexen ϱ-Ebene die Sektoren

$$S_\mu := \left\{ \varrho : \frac{\pi}{n-p}\cdot\mu \leq \arg \varrho \leq \frac{\pi}{n-p}\cdot(\mu+1) \right\}, \tag{2.12}$$

$$\mu = 0,1,\ldots,2(n-p)-1\,.$$

Die (n-p)-ten Einheitswurzeln bezeichnen wir mit ω_ν :

$$\omega_\nu = e^{\frac{2\pi i}{n-p}\nu} \quad , \quad (\nu = 0,1,\ldots,n-p-1) \; . \tag{2.13}$$

Nach [10] S.38 gilt:

Hilfssatz 2.1: Zu jedem Sektor S_μ existiert genau eine Permutation der Zahlen $1,\ldots,n-p$, so daß gilt:

$$\Re(\varrho\omega_{\mu_1}) \leq \ldots \leq \Re(\varrho\omega_{\mu_{n-p}}) \quad , \qquad \varrho \in S_\mu \; .- \tag{2.14}$$

Definition 2.1: Sei $\{\bar{y}_1(x,\varrho),\ldots,\bar{y}_n(x,\varrho)\}$ ein Fundamentalsystem von (2.1), und sei $\{h_1(x),\ldots,h_p(x)\}$ ein Fundamentalsystem von

$$n(y) = 0. \tag{2.15}$$

Weiterhin sei $\bar{y}_0(x)$ eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung

$$y' + \frac{1}{n-p}(f_1(x) - g_1(x))y = 0 \quad .- \tag{2.16}$$

Beachten wir noch die Abkürzung

$$[a] := a(1 + O(\tfrac{1}{\varrho})) \tag{2.17}$$

so können wir nun wie in [7] S.198 f. für die allgemeinen linearen Randbedingungen

$$U_j(y) := U_{j0}(y) + U_{j1}(y) = 0 \quad , \quad j = 1,\ldots,n \tag{2.18}$$

in der normierten Form

$$U_{j0}(y) := a_j y^{(\bar{k}_j)}(0) + \sum_{i=0}^{\bar{k}_j-1} \bar{\alpha}_{ji}\, y^{(i)}(0) \quad , \quad j=1,..,n \tag{2.19}$$

$$U_{j1}(y) := b_j y^{(\bar{k}_j)}(1) + \sum_{i=0}^{\bar{k}_j-1} \bar{\beta}_{ji}\, y^{(i)}(1) \quad , \quad j=1,..,n \tag{2.20}$$

$$n-1 \geq \bar{k}_1 \geq \ldots \geq \bar{k}_n \geq 0; \; \bar{k}_{j-2} > \bar{k}_j \; ; \; |a_j|+|b_j| > 0 \, , \tag{2.21}$$

eine "N-Regularität" definieren:

Definition 2.2: Wir unterscheiden die beiden Fälle $\bar{k}_{n-p} > \bar{k}_{n-p+1}$ und $\bar{k}_{n-p} = \bar{k}_{n-p+1}$:

Fall 1) $\bar{k}_{n-p} > \bar{k}_{n-p+1}$: Die Randbedingungen (2.18)-(2.21) heißen "N-regulär", wenn gilt:

$$(2.22)\qquad \bar{D}_o := \begin{vmatrix} U_{n-p+1}(h_1) & \dots & U_{n-p+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(h_1) & \dots\dots & U_n(h_p) \end{vmatrix} \neq 0$$

und wenn

a) bei $n-p = 2\eta - 1$ die durch

$$(2.23)\qquad D_1 = \Theta_o + \Theta_1 s =$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{\bar{k}_1} a_1 \dots\dots \omega_{\mu_{\eta-1}}^{\bar{k}_1} a_1, & \omega_{\mu_\eta}^{\bar{k}_1}(a_1+b_1 s), & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{\bar{k}_1} b_1 \dots\dots \omega_{\mu_{n-p}}^{\bar{k}_1} b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{\bar{k}_{n-p}} a_{n-p} \dots \omega_{\mu_{\eta-1}}^{\bar{k}_{n-p}} a_{n-p}, & \omega_{\mu_\eta}^{\bar{k}_{n-p}}(a_{n-p}+b_{n-p}s), & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{\bar{k}_{n-p}} b_{n-p} \dots \omega_{\mu_{n-p}}^{\bar{k}_{n-p}} b_{n-p} \end{vmatrix}$$

definierten Zahlen Θ_o und Θ_1 ungleich Null sind, oder wenn

b) bei $n-p = 2\eta$ die durch

$$(2.24)\qquad D_2 = \Theta_{-1} s^{-1} + \Theta_o + \Theta_1 s =$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{\bar{k}_1} a_1 \dots\dots \omega_{\mu_{\eta-1}}^{\bar{k}_1} a_1, & \omega_{\mu_\eta}^{\bar{k}_1}(a_1+b_1 s), & \\ \vdots & \vdots & \\ \omega_{\mu_1}^{\bar{k}_{n-p}} a_{n-p} \dots \omega_{\mu_{\eta-1}}^{\bar{k}_{n-p}} a_{n-p}, & \omega_{\mu_\eta}^{\bar{k}_{n-p}}(a_{n-p}+b_{n-p}s), & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \omega_{\mu_{\eta+1}}^{\bar{k}_1}(a_1+b_1 s^{-1}), & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{\bar{k}_1} b_1 \dots\dots \omega_{\mu_{n-p}}^{\bar{k}_1} b_1 \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{\mu_{\eta+1}}^{\bar{k}_{n-p}}(a_{n-p}+b_{n-p}s^{-1}), & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{\bar{k}_{n-p}} b_{n-p} \dots \omega_{\mu_{n-p}}^{\bar{k}_{n-p}} b_{n-p} \end{vmatrix}$$

definierten Zahlen Θ_{-1} und Θ_1 ungleich Null sind.

Fall 2) $\bar{k}_{n-p} = \bar{k}_{n-p+1}$: Die charakteristische Determinante

$$(2.25)\qquad D(\varrho) := \det\left(U_j(\bar{y}_i(x,\varrho))\right)$$

wird nach den Minoren der n-p letzten Spalten entwikkelt, so daß folgende Abschätzung entsteht:

$$(2.26)\qquad D(\varrho) = \pm\, \varrho^{\bar{k}_1+\dots+\bar{k}_{n-p}} \cdot e^{\varrho\,(\omega_{\mu_{\eta+1}}+\dots+\omega_{\mu_{n-p}})} \cdot \bar{y}_o^{\,n-p} \cdot$$

$$\cdot(\tilde{D}_o\bar{M}_o - \tilde{D}_1\bar{M}_1)\cdot[1] \quad ; \qquad \varrho \in S_\mu \ .$$

$\tilde{D}_i$ (i=0,1) sind die zu den $\overline{M}_i$ gehörenden Minoren aus den p ersten Spalten.

Die Randbedingungen (2.18)-(2.21) heißen "N-regulär", wenn

a) bei $n-p = 2\eta - 1$ die durch die Entwicklung von $\overline{M}_i$ nach Potenzen von $e^{s\omega_\mu \eta}$:

$$\overline{M}_i = \Theta_0^{(i)} + \Theta_1^{(i)} e^{s\omega_\mu \eta} \quad , \quad i=0,1 \tag{2.27}$$

definierten Zahlen $\tilde{\Theta}_0$ und $\tilde{\Theta}_1$:

$$\tilde{\Theta}_j := \tilde{D}_0 \Theta_j^{(0)} - \tilde{D}_1 \Theta_j^{(1)} \quad , \quad j=0,1 \tag{2.28}$$

von Null verschieden sind,

oder wenn

b) bei $n-p = 2\eta$ die durch die Entwicklung von $\overline{M}_i$ nach Potenzen von $e^{s\omega_\mu \eta}$:

$$\overline{M}_i = \Theta_{-1}^{(i)} e^{-s\omega_\mu \eta} + \Theta_0^{(i)} + \Theta_1^{(i)} e^{s\omega_\mu \eta} \quad , \quad i=0,1 \tag{2.29}$$

definierten Zahlen $\tilde{\Theta}_{-1}$ und $\tilde{\Theta}_1$:

$$\tilde{\Theta}_j := \tilde{D}_0 \Theta_j^{(0)} - \tilde{D}_1 \Theta_j^{(1)} \quad , \quad j=-1,0,1 \tag{2.30}$$

von Null verschieden sind.[1])

Sind die oben genannten Bedingungen nicht erfüllt, so heißen die Randbedingungen (2.18)-(2.21) "N-irregulär".-

Wir wenden nun die Definition 2.2 auf die zerfallenden Randbedingungen (2.5)-(2.10) an und erhalten:

Satz 2.1: Die Randausdrücke (2.6)-(2.9) werden durch Umnumerierung auf die Form (2.19)-(2.21) gebracht; sei j die zugehörige Permutation der Zahlen 1,...,n, so daß

$$\bar{k}_i := k_{j_i} \quad , \quad i = 1,\dots,n \tag{2.31}$$

gilt. Im Falle 1) $\bar{k}_{n-p} > \bar{k}_{n-p+1}$ sei δ definiert durch

$$\{k_1,\dots,k_\delta ; k_{m+1},\dots,k_{m+\tau}\} := \{\bar{k}_1,\dots,\bar{k}_{n-p}\} ; \tag{2.32}$$

---

[1]) Diese Definition der N-Regularität ist von der Wahl des Sektors S_μ ($\mu = 0,1,\dots,2(n-p)-1$) unabhängig; für N = I siehe [10] S.33 ff.

(2.33) $$\sigma + \tau = n-p$$

Im Falle 2) $\bar{k}_{n-p} = \bar{k}_{n-p+1}$ sei σ definiert durch (2.32),(2.33) und:

(2.34) $k_{m+\tau} := \bar{k}_{n-p}$, $k_{\sigma+1} := \bar{k}_{n-p+1}$ (also $k_{\sigma+1} = k_{m+\tau}$) .

Die zerfallenden Randbedingungen (2.5)-(2.10) sind genau dann N-regulär, wenn im

(2.35) Fall 1) $\bar{k}_{n-p} > \bar{k}_{n-p+1}$ gilt:

(i) $n-p = 2\eta$;

(ii) $\sigma = \eta$ (d.h. $k_{m+\eta} > k_{\eta+1}$ oder $k_{\eta} > k_{m+\eta+1}$);

(iii) $\frac{1}{n-p}(k_i - k_j) \notin \mathbb{Z}$ (Menge der ganzen Zahlen)

für $1 \leq i,j \leq \eta$; $m+1 \leq i,j \leq m+\eta$; $(i \neq j)$;

(iv) $\bar{D}_o \neq 0$

mit:

(2.36)
$$\bar{D}_o := \begin{vmatrix} U_{\eta+1}(h_1) & \cdots\cdots & U_{\eta+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \cdots\cdots & U_m(h_p) \\ U_{m+\eta+1}(h_1) & \cdots\cdots & U_{m+\eta+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(h_1) & \cdots\cdots & U_n(h_p) \end{vmatrix} ;$$

und wenn im

(2.37) Fall 2) $\bar{k}_{n-p} = \bar{k}_{n-p+1}$ gilt:

a) bei $n-p = 2\eta - 1$:

(i) $\sigma = \eta-1$ (d.h. $k_{m+\eta} = k_{\eta}$);

(ii) $\frac{1}{n-p}(k_i - k_j) \notin \mathbb{Z}$

für $1 \leq i,j \leq \eta$; $m+1 \leq i,j \leq m+\eta$; $(i \neq j)$;

(iii) $\tilde{D}_o \neq 0$ und $\tilde{D}_1 \neq 0$, mit:

(2.38)
$$\tilde{D}_o := \begin{vmatrix} U_{\eta}(h_1) & \cdots\cdots & U_{\eta}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \cdots\cdots & U_m(h_p) \\ U_{m+\eta+1}(h_1) & \cdots & U_{m+\eta+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(h_1) & \cdots\cdots & U_n(h_p) \end{vmatrix} , \quad \tilde{D}_1 := \begin{vmatrix} U_{\eta+1}(h_1) & \cdots & U_{\eta+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \cdots\cdots & U_m(h_p) \\ U_{m+\eta}(h_1) & \cdots & U_{m+\eta}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(h_1) & \cdots\cdots & U_n(h_p) \end{vmatrix} ;$$

b) bei $n-p = 2\eta$:

entweder $(i)_1$ $\quad \delta = \eta \quad$ (d.h. $k_{m+\eta} = k_{\eta+1}$)

oder $(i)_2$ $\quad \delta = \eta - 1 \quad$ (d.h. $k_{m+\eta+1} = k_\eta$);

(ii) $\quad \frac{1}{n-p}(k_i - k_j) \notin \mathbb{Z}$

für $1 \leq i,j \leq \eta$; $m+1 \leq i,j \leq m+\eta$; $(i \neq j)$;

(iii) $\quad \bar{D}_o \neq 0$ mit (2.36).-

(Beweis: S.62). [1)]

Wir beschränken uns im folgenden auf diejenigen Rand-Eigenwertprobleme (2.1)-(2.10), für die

$$(2.39) \qquad \frac{n+p}{2} < m < n \qquad \text{bzw.} \qquad 0 < n-m < \frac{n-p}{2}$$

gilt. Damit sind diese Rand-Eigenwertprobleme N-irregulär, denn nach Satz 2.1 steht (2.39) im Widerspruch zu (2.35)(iv),(2.37) a)(iii) und (2.37) b)(iii) und deshalb zur N-Regularität.

Es sei also in den folgenden Paragraphen das spezielle N-irreguläre Rand-Eigenwertproblem A_o zugrunde gelegt:

$$(2.40) \qquad m(y) = \lambda\, n(y)$$

$$(2.41) \qquad m(y) := y^{(n)} + f_2(x)\cdot y^{(n-2)} + \ldots + f_n(x)\cdot y$$

$$(2.42) \qquad n(y) := y^{(p)} + g_1(x)\cdot y^{(p-1)} + \ldots + g_p(x)\cdot y$$

$$(2.43) \qquad 0 \leq p \leq n-3$$

mit auf $[0,1]$ beliebig oft differenzierbaren Koeffizientenfunktionen und Randbedingungen in der zerfallenden und o.B.d.A. normierten Form

$$(2.44) \qquad U_j(y) := y^{(k_j)}(0) + \sum_{i=0}^{k_j-1} \alpha_{ji}\cdot y^{(i)}(0) = 0;\ j=1,\ldots,m$$

$$(2.45) \qquad U_j(y) := y^{(k_j)}(1) + \sum_{i=0}^{k_j-1} \beta_{ji}\cdot y^{(i)}(1) = 0;\ j=m+1,\ldots,n\ ;$$

[1)] Aus Satz 2.1 geht hervor, daß notwendigerweise im Falle der N-Regularität bei der Verteilung der Indizes $j_1,\ldots,j_{n-p}$ auf die Indexmengen $\{1,\ldots,m\}$, $\{m+1,\ldots,n\}$ eine gewisse Ausgeglichenheit herrschen muß.

(2.46) $$n-1 \geq k_1 > \ldots > k_m \geq 0$$

(2.47) $$n-1 \geq k_{m+1} > \ldots > k_n \geq 0$$

(2.48) $$\frac{1}{n-p}(k_i-k_j) \notin \mathbb{Z} \quad \text{für} \quad m+1 \leq i,j \leq n;\ (i \neq j)$$

(2.49) $$0 < n-m < \frac{n-p}{2}$$

(2.50) $$D_o := \begin{vmatrix} U_{m-p+1}(h_1) & \ldots & U_{m-p+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \ldots\ldots & U_m(h_p) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Schließlich nennen wir das Rand-Eigenwertproblem A_1, wenn Konstanten $C_h > 0$ existieren, so daß für alle h(x) mit n(h)=0:

(2.51) $$\left| D^r (N_{x_o}^{-1} m)^q\, h(x) \right| \leq C_h^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)! \ ;\ (D := \tfrac{d}{dx})$$

für alle $x, x_o \in [0,1]$; $q = 0,1,2,\ldots$; $r = 0,\ldots,n-1$ (ausgenommen $r = q = 0$), mit von q,r unabhängigen Konstanten gilt. [1])

Dabei haben wir in (2.41) bereits ausgenutzt, daß o.B.d.A. in (2.1)-(2.3) $f_1(x) \not\equiv 0$ vorausgesetzt werden darf (s. [10] S.37); allerdings benötigen wir dies ebenso wie die Voraussetzung (2.51) nur für den Beweis der hinreichenden Kriterien in § 7. Die Voraussetzungen (2.48)-(2.50) sind erforderlich im Hinblick auf das asymptotische Verhalten der Eigenwerte, der Eigenfunktionen und der Greenschen Funktion!

Anmerkung: 1) (2.43) folgt aus (2.4) und (2.39), da $n-m \in \mathbb{Z}$.
2) Die Voraussetzung (2.50) ist äquivalent mit der Aussage, daß der Operator $\tilde{N}$, der erzeugt wird durch (2.42) und (2.44) für $j = m-p+1,\ldots,m$, invertierbar ist. Also folgt aus (2.50) auch die Existenz von N^{-1}; insbesondere folgt, daß das Rand-Eigenwertproblem $My = \lambda Ny$ nicht ausgeartet ist.-

---

[1]) Nach Definition 6.4 (S.41) bedeutet (2.51) die Voraussetzung, daß die Lösungen $\{h_1(x),\ldots,h_p(x)\}$ von $n(y)=0$ $N_{x_o}^{-1}m$-analytisch auf $[0,1]$ sind; zu N_{x_o} siehe (6.58). Nach dem Beweis von Satz 6.13 genügt es, (2.51) für $x_o = 0$ oder (6.41) für $h_j(x)$ auf $[0,1]$ nachzuweisen. Für reell-analytische Koeffizientenfunktionen ist (2.51) nach Satz 6.12 stets erfüllt.

§ 3 Das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen

Um die angekündigten asymptotischen Abschätzungen angeben zu können, muß zunächst das asymptotische Verhalten von Fundamentalsystemen der Differentialgleichung (2.42) bekannt sein:

Satz 3.1: Zu jedem Fundamentalsystem $\{h_1(x),\dots,h_p(x)\}$ von (2.15) existiert ein Fundamentalsystem $\{\overline{y}_1(x,\varrho),\dots,\overline{y}_n(x,\varrho)\}$ von (2.1), das bezüglich $\varrho \in S, \varrho \neq 0$ [1]) analytisch ist und das sich für $|\varrho| > \varrho_0$ sowie für $0 \leq x \leq 1$ gleichmäßig abschätzen läßt:

$$(3.1)\qquad \overline{y}_j^{(i)}(x,\varrho) = h_j^{(i)}(x) + O(\tfrac{1}{\varrho}) \;;\; (j=1,..,p \;;\; i=0,..,p)$$

$$(3.2)\qquad \overline{y}_j^{(i)}(x,\varrho) = h_j^{(i)}(x) + O(\tfrac{1}{\varrho^{n-i}}) \;;\; \left\{\begin{matrix} j=1,..,p \\ i=p+1,..,n-1 \end{matrix}\right\}$$

$$(3.3)\qquad \overline{y}_j^{(i)}(x,\varrho) = (\varrho\,\omega_{j-p})^i \cdot e^{\varrho\omega_{j-p}x} \cdot \overline{y}_0(x)\cdot[1] \;;$$

$$(j=p+1,..,n \;;\; i=0,..,n-1)\ .-$$

(Beweis: [7] S.190 ff.).

Setzt man die Abschätzungen (3.1)-(3.3) in die charakteristische Determinante (2.25) ein und beachtet $D(\varrho_k) = 0$, so erhält man eine asymptotische Abschätzung der Eigenwerte:

Satz 3.2: Für die (n-p)-ten Wurzeln ϱ_k der Eigenwerte λ_k des Rand-Eigenwertproblems A_b, die im Falle

a) $n-m = 2\varkappa$ im Sektor $\tilde{S}_{2\varkappa}$:

$$(3.4)\qquad \tilde{S}_{2\varkappa}: \quad -\frac{\pi}{n-p} \leq \arg\varrho \leq \frac{\pi}{n-p}$$

und im Falle

b) $n-m = 2\varkappa+1$ im Sektor $\tilde{S}_{2\varkappa+1}$:

$$(3.5)\qquad \tilde{S}_{2\varkappa+1}: \quad -\frac{2\pi}{n-p} \leq \arg\varrho \leq 0$$

liegen, gelten die asymptotischen Darstellungen: sei

a)

$$(3.6)\qquad \varrho_k^0 := \frac{\pi}{\sin\frac{2\varkappa\pi}{n-p}} \cdot \left[k + \frac{n-p}{2} - \frac{k_1+..+k_{m-p}+k_{m+1}+..+k_n}{n-p}\right]$$

für $n-m = 2\varkappa$, und

[1]) S sei ein Sektor in der ϱ-Ebene vom Öffnungswinkel $\frac{\pi}{n-p}$.

b)

$$(3.7)\qquad \varrho_k^o := \frac{\pi \cdot e^{-\frac{\pi i}{n-p}}}{\sin\frac{(2\varkappa+1)\pi}{n-p}} \cdot \left[k + \frac{n-p}{2} - \frac{k_1+..+k_{m-p}+k_{m+1}+..+k_n}{n-p}\right]$$

für $n-m = 2\varkappa+1$,
so gilt in jedem Falle die asymptotische Darstellung:

$$(3.8)\qquad \varrho_k = \varrho_k^o + O(\tfrac{1}{k}) \qquad \text{für } k > k_o \ .-$$

(Beweis: S. 70).
Mit Satz 3.2 liegt es nahe, folgende Aussage zu behaupten:
Satz 3.3: Alle Eigenwerte des Rand-Eigenwertproblems $A_\circ$ sind für hinreichend großes k einfach:
die Eigenräume der Eigenfunktionen $y_k(x)$ sind für $k > k_o$ sämtlich eindimensional.-
(Beweis: S. 72).
Nach [10] S.65/66 ist durch

$$(3.9)\qquad y_k^o(x) := \begin{vmatrix} \overline{y}_1(x,\varrho_k) & \cdots & \overline{y}_n(x,\varrho_k) \\ U_1(\overline{y}_1(x,\varrho_k)) & \cdots & U_1(\overline{y}_n(x,\varrho_k)) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{n-1}(\overline{y}_1(x,\varrho_k)) & \cdots & U_{n-1}(\overline{y}_n(x,\varrho_k)) \end{vmatrix} \qquad (k > k_o)$$

eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k gegeben, falls nicht alle Minoren der Elemente der ersten Zeile der Determinante in (3.9) verschwinden; andernfalls muß man $\overline{y}_1(x,\varrho_k),\ldots$ $\ldots,\overline{y}_n(x,\varrho_k)$ in einer Zeile anordnen, deren Minoren nicht sämtlich verschwinden. Eine solche Zeile existiert, da nach Satz 3.3 der Eigenwert λ_k einfach ist und somit

$$(3.10)\qquad rg\ (U_j(\overline{y}_i(x,\varrho_k)) = n-1 \quad \text{für} \quad k > k_o$$

ist. Da die Wahl dieser Zeile nur die Normierung von $y_k(x)$ beeinflußt, können wir uns bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens der Eigenfunktionen auf (3.9) beschränken.
Setzen wir die Abschätzungen (3.1)-(3.3) in (3.9) ein, so folgt:
Satz 3.4: Für die Eigenfunktionen y_k^o des Rand-Eigenwertproblems $A_\circ$ gelten die für $k > k_o$ und für jedes abgeschlossene Teilintervall von (0,1) gleichmäßigen asymptotischen Darstellungen im Falle
a) $n-m = 2\varkappa$ für $\varrho_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$:

(3.11) $$y_k^o(x) = \pm \alpha \cdot \varrho_k^{k_1+..+k_{m-p}+k_{m+1}+..+k_{n-1}} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+..+\omega_{\varkappa-1})} \cdot \left[e^{\varrho_k \omega_{-\varkappa} x} + (-1)^{m-p} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}(k_1+..+k_{m-p})} \cdot e^{\varrho_k \omega_{\varkappa} x} \right] \cdot \overline{y}_o(x) \cdot [1]_k$$

für $x \in (0,1)$ mit

(3.12) $$\alpha := D_o \overline{y}_o(0)^{m-p} \overline{y}_o(1)^{n-m-1} \cdot \begin{vmatrix} \omega^{k_1} & \dots & \omega^{k_1} \\ {\scriptstyle n-p-\varkappa-1} & & {\scriptstyle \varkappa} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^{k_{m-p}} & \dots & \omega^{k_{m-p}} \\ {\scriptstyle n-p-\varkappa-1} & & {\scriptstyle \varkappa} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega^{k_{m+1}} & \dots & \omega^{k_{m+1}} \\ {\scriptstyle -\varkappa+1} & & {\scriptstyle \varkappa-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^{k_{n-1}} & \dots & \omega^{k_{n-1}} \\ {\scriptstyle -\varkappa+1} & & {\scriptstyle \varkappa-1} \end{vmatrix}$$

b) $n-m = 2\varkappa+1$ für $\varrho_k \in \tilde{S}_{2\varkappa+1}$:

(3.13) $$y_k^o(x) = \pm \beta \cdot \varrho_k^{k_1+..+k_{m-p}+k_{m+1}+..+k_{n-1}} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+..+\omega_{\varkappa})} \cdot \left[e^{\varrho_k \omega_{-\varkappa} x} + (-1)^{m-p} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}(k_1+..+k_{m-p})} \cdot e^{\varrho_k \omega_{\varkappa+1} x} \right] \cdot \overline{y}_o(x) \cdot [1]_k$$

für $x \in (0,1)$ mit

(3.14) $$\beta := D_o \overline{y}_o(0)^{m-p} \overline{y}_o(1)^{n-m-1} \cdot \begin{vmatrix} \omega^{k_1} & \dots & \omega^{k_1} \\ {\scriptstyle n-p-\varkappa-1} & & {\scriptstyle \varkappa+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^{k_{m-p}} & \dots & \omega^{k_{m-p}} \\ {\scriptstyle n-p-\varkappa-1} & & {\scriptstyle \varkappa+1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega^{k_{m+1}} & \dots & \omega^{k_{m+1}} \\ {\scriptstyle -\varkappa+1} & & {\scriptstyle \varkappa} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega^{k_{n-1}} & \dots & \omega^{k_{n-1}} \\ {\scriptstyle -\varkappa+1} & & {\scriptstyle \varkappa} \end{vmatrix} .$$

Seien die Koeffizientenfunktionen holomorph in $|z| \leq 1$: Die Eigenfunktionen sind in $|z| \leq 1$ holomorph, und die y_k^o besitzen dort die gleichmäßigen Abschätzungen:

a) $n-m = 2\varkappa$ für $\varrho_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$:

(3.15) $$y_k^o(z) = \varrho_k^{K-k_n} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\dots+\omega_{\varkappa-1})} \cdot \left\{ O(\varrho_k^{k_{m-p+1}}) + \sum_{j-p=n-p-\varkappa}^{\varkappa} O(e^{\varrho_k \omega_{j-p} z}) + \sum_{j-p=-\varkappa+1}^{\varkappa-1} O(e^{\varrho_k \omega_{j-p}(z-1) + \varrho_k \omega_{\vartheta_1}}) \right\};$$

b) $n-m = 2\varkappa+1$ für $\varrho_k \in \tilde{S}_{2\varkappa+1}$:

(3.16) $$y_k^o(z) = \varrho_k^{K-k_n} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\dots+\omega_{\varkappa})} \cdot \left\{ O(\varrho_k^{k_{m-p+1}}) + \sum_{j-p=n-p-\varkappa}^{\varkappa+1} O(e^{\varrho_k \omega_{j-p} z}) + \sum_{j-p=-\varkappa+1}^{\varkappa} O(e^{\varrho_k \omega_{j-p}(z-1) + \varrho_k \omega_{\vartheta_2}}) \right\};$$

mit

$$K := k_1 + \ldots + k_{m-p} + k_{m+1} + \ldots + k_n \quad ; \tag{3.17}$$

$$\omega_{\gamma_1} := \begin{cases} \omega_\varkappa \\ \omega_{-\varkappa} \end{cases} \quad \text{falls} \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{n-p} \leq \arg \varrho_k \leq 0 \\ 0 \leq \arg \varrho_k \leq \frac{\pi}{n-p} \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\omega_{\gamma_2} := \begin{cases} \omega_{\varkappa+1} \\ \omega_{-\varkappa} \end{cases} \quad \text{falls} \quad \begin{cases} -\frac{2\pi}{n-p} \leq \arg \varrho_k \leq -\frac{\pi}{n-p} \\ -\frac{\pi}{n-p} \leq \arg \varrho_k \leq 0 \end{cases} . \tag{3.19}$$

(Beweis: S.73).

Anmerkung: In [7] wird Satz 3.1 für reelle $z = x$ und $x \in [0,1]$ unter gewissen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen in (2.2),(2.3) bewiesen; die Lösungen $\overline{y}_j(x,\varrho)$ $(j=1,\ldots,n)$ von (2.1) sind dort (n-1)-mal stetig differenzierbar. Der Beweis läßt sich sogar Schritt für Schritt auf den Fall übertragen, daß die Koeffizientenfunktionen im Einheitskreis holomorph sind, und man erhält dann die Behauptung von Satz 3.1 für $|z| \leq 1$. [1])

Die Ergebnisse dieses Paragraphen versetzen uns in die Lage, notwendige Kriterien für die Entwickelbarkeit von Funktionen in gleichmäßig konvergente Fourierreihen nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_0 anzugeben.

---

[1]) $z \in \mathbb{C}$, dem Körper der komplexen Zahlen.

§ 4 Notwendige Kriterien für die Entwickelbarkeit von Funktionen

Satz 4.1: Seien $y_k(x)$ die Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_o mit in $|z| \leq 1$ holomorphen Koeffizientenfunktionen. Konvergiert

(4.1) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, y_k(x)$$

gleichmäßig im Intervall $[x_o, x_1]$ $(0 \leq x_o < x_1 \leq 1)$, so konvergiert sie gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich aus dem Innern eines Polygons um $[0, x_1]$ mit den $m-p+1$ Eckpunkten:

a) für $n-m = 2\varkappa$:

(4.2) $$x_1\,,\ x_1 \cdot \frac{\cos\frac{2\varkappa\pi}{n-p}}{\cos\frac{\pi}{n-p}} \cdot e^{\frac{(2\nu-1)\pi i}{n-p}} \qquad ;(\nu = \varkappa+1, \ldots, n-p-\varkappa)$$

b) für $n-m = 2\varkappa+1$:

(4.3) $$x_1\,,\ x_1 \cdot \frac{\cos\frac{(2\varkappa+1)\pi}{n-p}}{\cos\frac{\pi}{n-p}} \cdot e^{\frac{2\nu\pi i}{n-p}} \qquad ;(\nu = \varkappa+1, \ldots, n-p-\varkappa-1)$$

und stellt dort eine holomorphe Funktion dar.-
(Beweis: S. 75).

Falls $x_o = 0$ und $x_1 = 1$, so folgt aus Satz 4.1 eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion $f(x)$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_o entwickelbar ist. Denn wenn die Fourierentwicklung von $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ gleichmäßig konvergiert, so stellt sie dort $f(x)$ dar. Da außerdem nach Satz 4.1 die Reihe im Innern des Polygons eine holomorphe Funktion darstellt, muß $f(x)$ längs der reellen Achse Funktionselement einer im Polygon um $[0,1]$ holomorphen Funktion sein. [1])

Wir erhalten daraus:

[1]) Für N = I vgl. [2], S. 208-209.

Satz 4.2: $f(x)$ ist nur dann im Intervall $[0,1]$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_o mit in $|z| \leq 1$ holomorphen Koeffizientenfunktionen entwickelbar, wenn $f(x)$ im Intervall $[0,1]$ Funktionselement einer im betreffenden Polygon (4.2) bzw. (4.3) mit $x_1 = 1$ holomorphen Funktion $f(z)$ ist.-

Wir lesen aus Satz 4.1 ab, daß das Polygon am größten wird, wenn $n-m = 1$ ist, d.h. wenn sich nur eine Randbedingung auf den Punkt $x = 1$ und alle anderen $n-1$ Randbedingungen auf den Punkt $x = 0$ beziehen; in diesem Fall ist die Eckenzahl gleich $n-p$, also maximal, der Umkreisradius gleich x_1, d.h. es entsteht ein regelmäßiges Polygon um $z = 0$. Es liegt nahe [1]), diesen Fall als den "irregulärsten" zu bezeichnen. Je ausgewogener die Anzahl der Randbedingungen bei 0 und 1 ist, d.h. je kleiner die Differenz $m-(n-m)$ ist, wobei jedoch wegen (2.49)

$$0 \leq p < m-(n-m) \leq n-2 \tag{4.4}$$

beachtet werden muß, desto kleiner wird das Polygon. Im Falle

$$n-m = \frac{n-p}{2} \quad (= m-p) \tag{4.5}$$

schrumpft es auf das Intervall $[0,x_1]$ zusammen. Das Rand-Eigenwertproblem (2.1)-(2.10) ist in diesem Fall (4.5) genau dann N-regulär, wenn (2.48),(2.50) und

$$k_{m-p+1} \leq k_n \tag{4.6}$$

gelten; denn (4.6) ist äquivalent mit $\sigma = \eta$; der Fall (2.37) b) $(i)_2$ kann im Fall (4.5) nicht eintreten. Deshalb gilt:

$$\overline{k}_{n-p} = k_n \quad , \quad \overline{k}_{n-p+1} = k_{m-p+1} \quad . \tag{4.7}$$

Da außerdem (2.35)(iii) bzw. (2.37) b)(ii) wegen (8.39) äquivalent mit (2.48) ist, folgt die Behauptung. Wir können also die Größe des Polygons gleichsam als Maß für die N-Irregularität der zerfallenden Randbedingungen werten.

Zur Verdeutlichung der Lage der Polygone geben wir ein Beispiel:

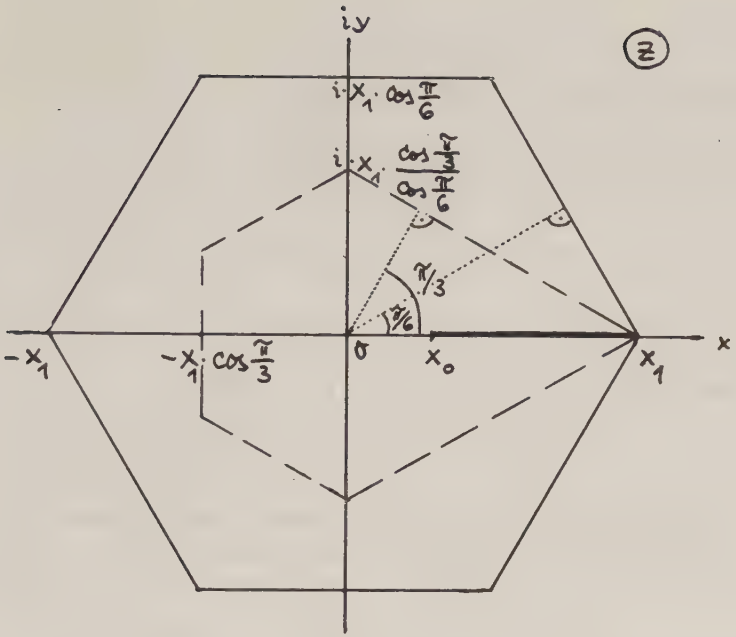
Sei $n = 8$, $p = 2$:

a) $m = 6$, $n-m = 2$ ($\varkappa = 1$): Eckenzahl 5 (gestrichelte Figur)

b) $m = 7$, $n-m = 1$ ($\varkappa = 0$): Eckenzahl 6 (durchgezogene Figur)

---

[1]) Für $p = 0$ vgl. [2] ,S.2o7.



Im Falle der N-Regularität des Rand-Eigenwertproblems (2.1)-(2.10) gilt nach [8],S.23 folgender Entwicklungssatz:

Satz 4.3: Seien $y_k(x)$ die zu den Eigenwerten λ_k gehörenden Eigenfunktionen und $z_k(x)$ die Eigenfunktionen, die zu den Eigenwerten $\overline{\lambda}_k$ des zu (2.1),(2.5) adjungierten Problems $M^*y = \lambda N^*y$ gehören [1]). $My = \lambda Ny$ sei N-regulär; sei $f(x) \in C^n[0,1]$ sowie $U_j(f) = 0$ für $j = 1,\dots,n$. Dann konvergiert mit

$$c_k := \int_0^1 \overline{z_k(\xi)}\cdot n(f(\xi))\,d\xi \tag{4.8}$$

die verallgemeinerte Fourierentwicklung von $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot y_k(x) \tag{4.9}$$

gleichmäßig in $[0,1]$.-

Wie im Falle N = I der gewöhnliche Entwicklungssatz für reguläre Rand-Eigenwertprobleme, so fordert auch der Entwicklungssatz 4.3 für N-reguläre Rand-Eigenwertprobleme keine Regularitätseigen-

[1]) O.B.d.A. sei das Biorthogonalsystem $\{y_\mu(x), z_\nu(x)\}$ normiert.

schaften von f(x). Im Gegensatz hierzu haben bereits Eberhard in [2] und [3] bzw. Kromow in [12] im Falle N = I für irreguläre Rand-Eigenwertprobleme die Notwendigkeit der Holomorphie gemäß Satz 4.1 [1]) bzw. einer bestimmten analytischen Eigenschaft von f(x) gemäß Satz 4.4 2) nachgewiesen:

Satz 4.4: Seien $y_k(x)$ die Eigenfunktionen des Problems A_o. Falls

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, y_k(x) \tag{4.10}$$

gleichmäßig auf $[x_o, x_1]$ $(0 \leq x_o < x_1 \leq 1)$ konvergiert, so gilt:

1) die Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q y_k(x) \quad \begin{Bmatrix} r=0,..,n-1 \\ q=0,1,2,.. \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$ [2])

konvergieren absolut und gleichmäßig auf dem ganzen Intervall $[0,c]$ für jedes c mit $0 < c < x_1$;

2) für jedes $x \in [0, x_1-\delta]$ mit beliebigem $0 < \delta < x_1$ gilt:

$$\left| D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x) \right| \leq \tilde{C}_\delta \left(\frac{1+\delta}{(x_1-x-\delta)\cdot \cos(\frac{n-m}{n-p}\pi)} \right)^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)! \tag{4.12}$$

$(r=0,\ldots,n-1;\ q=0,1,2,\ldots)$

wobei $\tilde{C}_\delta$ nur von δ abhängt; [3])

3) $(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)$ erfüllen für alle $q = 0,1,2,\ldots$ die Randbedingungen in $x = 0$.

(Beweis: S.77).

Wir bemerken, daß die Regularität von f(x) allein nicht ausreichen kann, damit die Fourierreihe f(x) darstellt: insbesondere muß die notwendige Bedingung 3) in Satz 4.4 beachtet werden.

Den Zugang zur Auffindung hinreichender Kriterien für die Entwickelbarkeit von Funktionen bietet das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion.

---

[1]) Eberhard erhielt infolge gröberer Abschätzungen ein regelmäßiges (n-p)-Eck, und zwar jenes, aus dem das Polygon in Satz 4.1 durch Vergrößerung hervorgeht.

[2]) Zur Definition von $\tilde{N}$ s. Anmerkung 2) auf S.10.

[3]) Nach Definition 6.2 (S.31) bedeutet (4.12) genau, daß f(x) $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $[0,x_1)$ ist.

§ 5 Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion

Die wichtigsten Eigenschaften aus der analytischen Natur der Greenschen Funktion $G(x,\xi,\lambda)$ des Problems (2.1),(2.5) werden hier ohne Beweis [1]) angeführt:

1) Die Greensche Funktion $G(x,\xi,\lambda)$ ist eine meromorphe Funktion des Parameters λ und besitzt dort Pole, wo λ gleich einem Eigenwert ist.

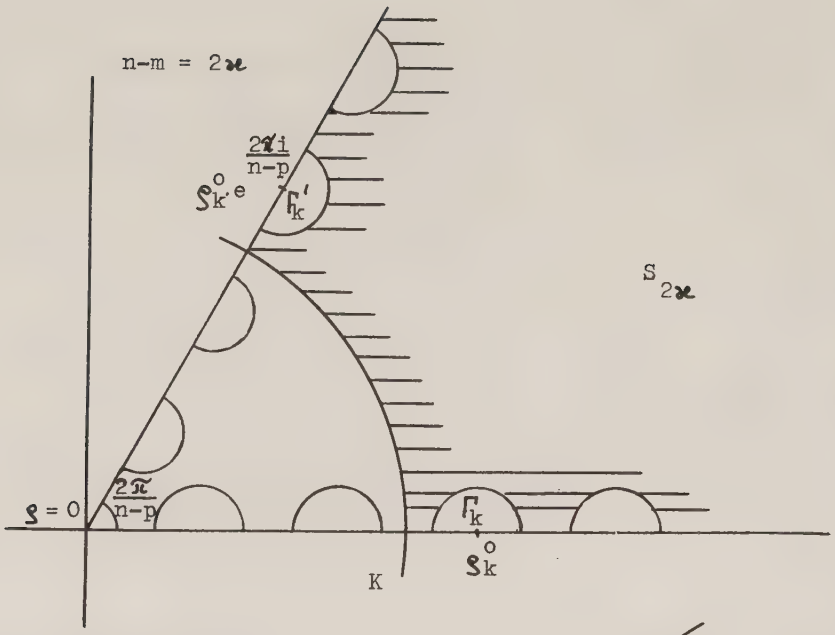
2) Für jede einfache Nullstelle λ_k der charakteristischen Determinante $D(\lambda)$ (s.2.25) des Problems (2.1),(2.5) hat die Greensche Funktion einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-y_k(x)\cdot\overline{z_k(\xi)}$; dabei ist $y_k(x)$ die zum Eigenwert λ_k gehörige Eigenfunktion der Aufgabe (2.1),(2.5) und $z_k(x)$ die zum Eigenwert $\overline{\lambda}_k$ gehörige Eigenfunktion der adjungierten Aufgabe. Wir setzen voraus, daß das Biorthogonalsystem $\{y_\mu(x),z_\nu(x)\}$ normiert ist:

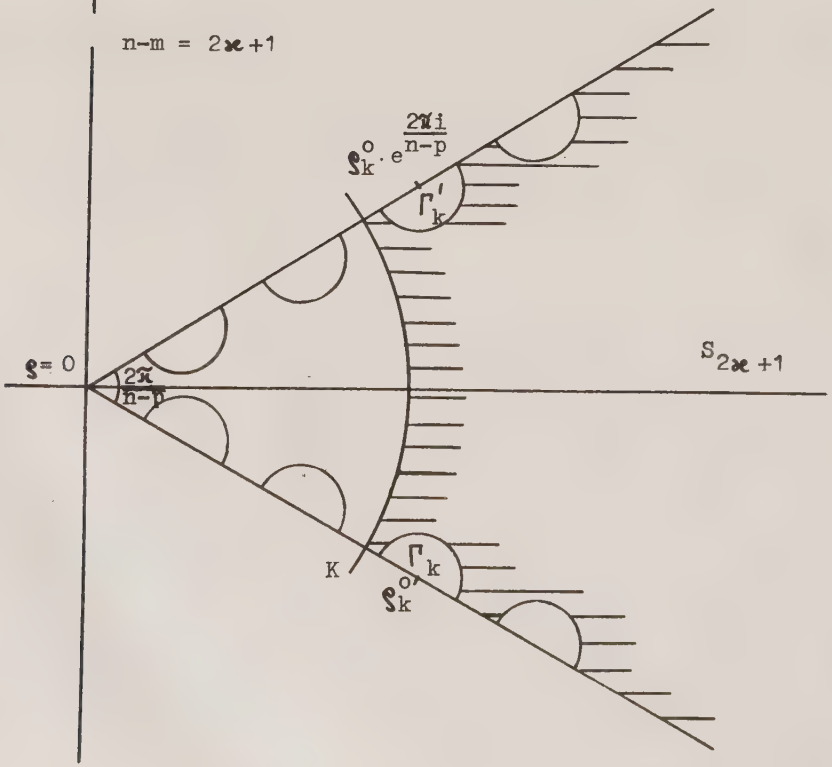
$$\int_0^1 \overline{z_\nu(\xi)}\cdot n(y_\mu(\xi))\cdot d\xi = \delta_{\mu\nu} \quad . \tag{5.1}$$

Abschätzungen und asymptotische Darstellungen der Greenschen Funktion können daher nur in solchen Bereichen der λ - bzw. ϱ-Ebene durchgeführt werden, aus denen Eigenwertumgebungen ausgeschnitten sind, etwa nach folgender Vorschrift:

Wir beschreiben um die Hauptwerte für ϱ_k Kreise Γ_k mit beliebig kleinem, aber festem Radius δ, so daß diese Kreise sich nicht überlappen, desgleichen Kreise Γ_k' um alle Punkte $\varrho_k^0\cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}}$. Für $k > k_0$ befinden sich dann auf Grund der asymptotischen Formeln (3.6),(3.7) alle Eigenwerte innerhalb der Kreise Γ_k. Dies finde außerhalb des Kreises K mit dem Mittelpunkt in $\varrho = 0$ und dem Radius R statt, auf dessen Peripherie außerdem kein ϱ_k liegen soll. Aus dem Sektor $0 \leq \arg\varrho \leq \frac{2\pi}{n-p}$ im Falle $n-m = 2\varkappa$ bzw. $-\frac{\pi}{n-p} \leq \arg\varrho \leq \frac{\pi}{n-p}$ im Falle $n-m = 2\varkappa+1$ der komplexen ϱ-Ebene schneiden wir den entsprechenden Teil des Kreises K und aus dem verbleibenden Teil des Sektors die Halbkreise Γ_k,Γ_k' aus. Den restlichen Bereich bezeichnen wir mit $S_{2\varkappa}$ bzw. $S_{2\varkappa+1}$. Unter $T^{(\varepsilon)}_{2\varkappa}$ bzw. $T^{(\varepsilon)}_{2\varkappa+1}$ verstehen wir den Durchschnitt aus dem Sektor $\varepsilon \leq \arg\varrho \leq \frac{2\pi}{n-p} - \varepsilon$ bzw. $-\frac{\pi}{n-p} + \varepsilon \leq \arg\varrho \leq \frac{\pi}{n-p} - \varepsilon$ und aus $S_{2\varkappa}$ bzw. $S_{2\varkappa+1}$ für jedes $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{n-p}$.

[1]) s. [10] S.33-35.


n-m = 2ϰ
$\frac{2\pi i}{n-p}$
$\varrho_k^o \cdot e$
Γ_k'
$S_{2\varkappa}$
$\varrho = 0$
$\frac{2\pi}{n-p}$
Γ_k
ϱ_k^o
K


n-m = 2ϰ+1
$\frac{2\pi i}{n-p}$
$\varrho_k^o \cdot e$
Γ_k'
$\varrho = 0$
$S_{2\varkappa+1}$
$\frac{2\pi}{n-p}$
K
Γ_k
ϱ_k^o

In dem ersten der beiden folgenden Sätze wird zunächst eine asymptotische Darstellung bewiesen, die in dem Sektor $T_{n-m}^{(\varepsilon)}$ ($\varepsilon \geq \varepsilon_0(\delta)$) gültig ist. Mit der gleichen Methode beweisen wir dann eine Abschätzung für die Greensche Funktion, die sich aber auf den ganzen Sektor S_{n-m} bezieht. Damit haben wir auch Aussagen über die Greensche Funktion zwischen den Polstellen ϱ_k und in den restlichen Bereichen des Sektors S_{n-m}. Um die Formulierung der beiden Sätze zu vereinfachen, verwenden wir die folgenden Abkürzungen:

$$\omega_{\alpha_1} := \begin{cases} \omega_{-\varkappa} & \text{falls } 0 \leq \arg \varrho \leq \frac{\pi}{n-p} \\ \omega_{\varkappa-1} & \text{falls } \frac{\pi}{n-p} \leq \arg \varrho \leq \frac{2\pi}{n-p} \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\omega_{\alpha_2} := \begin{cases} \omega_{-\varkappa} & \text{falls } -\frac{\pi}{n-p} \leq \arg \varrho \leq 0 \\ \omega_{\varkappa} & \text{falls } 0 \leq \arg \varrho \leq \frac{\pi}{n-p} \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\omega_{\beta_1} := \begin{cases} \omega_{\varkappa} & \text{falls } 0 \leq \arg \varrho \leq \frac{\pi}{n-p} \\ \omega_{-\varkappa-1} & \text{falls } \frac{\pi}{n-p} \leq \arg \varrho \leq \frac{2\pi}{n-p} \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\omega_{\beta_2} := \begin{cases} \omega_{\varkappa+1} & \text{falls } -\frac{\pi}{n-p} \leq \arg \varrho \leq 0 \\ \omega_{-\varkappa-1} & \text{falls } 0 \leq \arg \varrho \leq \frac{\pi}{n-p} \end{cases} \tag{5.5}$$

Satz 5.1: Für die Greensche Funktion des Rand-Eigenwertproblems A_0 gilt im Sektor $T_{2\varkappa}^{(\varepsilon)}$ bzw. $T_{2\varkappa+1}^{(\varepsilon)}$ die folgende asymptotische Darstellung: [1]

a) im Falle $n-m = 2\varkappa$ im Sektor $T_{2\varkappa}^{(\varepsilon)}$:

$$G(x,\xi,\varrho) = \frac{\overline{y}_0(x)\cdot\overline{y}_0(\xi)^{-1}}{(n-p)\cdot\varrho^{n-1}} \cdot \tag{5.6}$$

$$\cdot \begin{cases} -\sum_{k=-\varkappa}^{\varkappa-1} \omega_k^{1-p} \cdot e^{\varrho\omega_k(x-\xi)} + O\left(\frac{e^{\varrho\omega_{\alpha_1}(x-\xi)}}{\varepsilon\cdot\varrho}\right) ; & (0<x<\xi<1) \\ \sum_{k=\varkappa}^{n-p-\varkappa-1} \omega_k^{1-p} e^{\varrho\omega_k(x-\xi)} + O\left(\frac{e^{\varrho\omega_{\beta_1}(x-\xi)}}{\varepsilon\cdot\varrho}\right) ; & (0<\xi<x<1) \end{cases}$$

[1]) bzgl. x, ξ gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall

b) im Falle $n-m = 2\varkappa+1$ im Sektor $T^{(\varepsilon)}_{2\varkappa+1}$:

$$(5.7)\qquad G(x,\xi,\varrho) = \frac{\overline{y}_0(x)\cdot\overline{y}_0(\xi)^{-1}}{(n-p)\cdot\varrho^{n-1}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\begin{array}{l} -\sum\limits_{k=-\varkappa}^{\varkappa}\omega_k^{1-p}\, e^{\varrho\omega_k(x-\xi)} + O\left(\frac{e^{\varrho\omega_{\alpha_2}(x-\xi)}}{\varepsilon\cdot\varrho}\right)\ ;\ (0<x<\xi<1) \\ \sum\limits_{k=\varkappa+1}^{n-p-\varkappa+1}\omega_k^{1-p}\, e^{\varrho\omega_k(x-\xi)} + O\left(\frac{e^{\varrho\omega_{\beta_2}(x-\xi)}}{\varepsilon\cdot\varrho}\right)\ ;\ (0<\xi<x<1) \end{array}\right\}.$$

Durch formale partielle Differentiation nach x oder ξ erhält man entsprechende Darstellungen für die r-ten Ableitungen (r = 0,...,n-1) bezüglich x oder ξ aus den Darstellungen (5.6),(5.7).

(Beweis: S.81).

Satz 5.2: Die Greensche Funktion des Rand-Eigenwertproblems A_0 und ihre Ableitungen besitzen im Sektor $S_{2\varkappa}$ bzw. $S_{2\varkappa+1}$ die bzgl. x, ξ auf $[0,1]$ gleichmäßigen Abschätzungen:

$$(s,t = 0,\ldots,n-1)$$

$$(5.8)\qquad \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^t G(x,\xi,\varrho)\right| \le$$

$$\le \frac{c_1^{(i)}(s,t)}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|\varrho|^{n-1-s-t}}\cdot\left\{\begin{array}{l} e^{(x-\xi)\Re(\varrho\omega_{\alpha_i})}\ ;(0\le x\le\xi\le 1) \\ e^{(x-\xi)\Re(\varrho\omega_{\beta_i})}\ ;(0\le\xi\le x\le 1)\end{array}\right\} +$$

$$+ \frac{c_2^{(i)}(s,t)}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|\varrho|^{n-1-k_{m-p+1}-t}}\cdot e^{-\xi\cdot\Re(\varrho\omega_{\alpha_i})} +$$

$$+ \frac{c_3^{(i)}(s,t)}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|\varrho|^{n-p+k_n-s}}\cdot e^{(x-1)\cdot\Re(\varrho\omega_{\alpha_i})} +$$

$$+ \frac{c_4^{(i)}(s,t)}{\varepsilon}\cdot\frac{1}{|\varrho|^{n-p}}\cdot\left\{\begin{array}{l} |\varrho|^{k_{m-p+1}-k_n}\cdot e^{-\Re(\varrho\omega_{\alpha_i})}\ ;(0\le x\le\xi\le 1) \\ 1\ ;(0\le\xi\le x\le 1)\end{array}\right\}$$

a) im Falle $n-m = 2\varkappa$ im Sektor $S_{2\varkappa}$ setze i = 1 ,

b) im Falle $n-m = 2\varkappa+1$ im Sektor $S_{2\varkappa+1}$ setze i = 2

in (5.8) ein.

dabei ist ε der Radius der Kreise Γ_k, Γ'_k, wie sie auf S.19 unten und S.20 definiert worden sind. (Beweis: S.90).

Wir lesen aus den Darstellungen (5.6) und (5.7) ab, daß sich die Greensche Funktion $G(x,\xi,\varsigma)$ als Funktion von ς völlig verschieden verhält, je nachdem ob die Randbedingungen (2.5)-(2.10) N-regulär oder N-irregulär sind:

a) In [8] S.17-21 haben Eberhard und Freiling gezeigt, daß die Greensche Funktion N-regulärer Rand-Eigenwertprobleme (2.1), (2.5) stets beschränkt bleibt.

b) Für das spezielle N-irreguläre Rand-Eigenwertproblem A_o aber erkennen wir aus (5.6),(5.7),(5.8), daß $G(x,\xi,\varsigma)$ zwar für $\xi \geq x$ beschränkt ist, daß für $x > \xi$ die Greensche Funktion jedoch exponentiell mit ς wächst, da über Einheitswurzeln summiert wird, für die $\Re(\varsigma\,\omega_k) > 0$ ausfällt. Dies sind insbesondere die Einheitswurzeln ω_{β_1} und ω_{β_2} von (5.4) und (5.5).-

Als nächstes stellt sich nun die Frage, ob überhaupt noch gleichmäßig konvergente Entwicklungen existieren, wenn die zerfallenden Randbedingungen N-irregulär sind:

Wir setzen von nun an voraus, daß <u>die Eigenwerte des betrachteten Rand-Eigenwertproblems alle einfach</u> sind.

Um die obige Frage für das allgemeine N-irreguläre Rand-Eigenwertproblem A_o in den folgenden Paragraphen zu beantworten, stellen wir die Teilsummen (zu c_k s.(4.8))

$$s_j(x) := \sum_{k=1}^{j} c_k \cdot y_k(x) \tag{5.9}$$

der verallgemeinerten Fourierreihenentwicklung von f(x) als Konturintegral dar:

<u>Hilfssatz 5.1</u>: Für die Teilsummen der verallgemeinerten Fourierentwicklung von f(x) gilt:

$$s_j(x) = \frac{-(n-p)}{2\pi i} \int_{K_j(\varsigma)} \frac{d\varsigma}{\varsigma} \left(\int_0^1 \varsigma^{n-p} \cdot G(x,\xi,\varsigma) \cdot n(f(\xi)) \cdot d\xi \right) \tag{5.10}$$

Dabei bedeutet $K_j(\varsigma)$ den Kreisbogen des Sektors um $\varsigma = 0$ mit dem Radius r und dem Öffnungswinkel $0 \leq \arc \varsigma < \frac{2\pi}{n-p}$ bzw. $-\frac{\pi}{n-p} \leq \arc \varsigma < \frac{\pi}{n-p}$, der ganz

in $S_{2\varkappa}$ bzw. $S_{2\varkappa+1}$ verläuft, der die j ersten Eigenwerte einschließt und auf dessen Peripherie kein Eigenwert liegt.

(Beweis: S.94).

Anhand des Hilfssatzes 5.1 beweisen wir einen weiteren:

Hilfssatz 5.2: $f(x)$ sei stetig auf $[0,1]$ und $f(x) \in C^n[0,d_1]$ $(0<d_1<1)$; ferner sei $U_j(f) = 0$ für $j = 1,\ldots,m$. Dann gilt für das Eigenwertproblem A_o:

$$f(x) - s_j(x) = \tag{5.11}$$

$$= \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^x G(x,\xi,\varrho) \cdot m(f) \cdot d\xi + o(1) \quad (j\to\infty)$$

für alle $x \in [0,d]$ mit $0<d<d_1<1$.

Falls zusätzlich zu obigen Voraussetzungen noch gilt: $f(x) \in C^n[0,1]$ und $U_j(f) = 0$ für $j = m+1,\ldots,n$, so ist (5.11) sogar richtig für alle $x \in [0,1]$.

(Beweis: S.94).

Es stellt sich nun die Aufgabe, für das Integral

$$I(x,\varrho) := \int_0^x G(x,\xi,\varrho) \cdot m(f) \cdot d\xi \tag{5.12}$$

eine Abschätzung der Art zu finden, daß

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0 \le x \le d} \left| f(x) - s_j(x) \right| = 0 \; ; \quad (0 < d \le 1) \tag{5.13}$$

gilt. In [12] hat Kromow im Falle $N = I$ einen Weg gefunden, diese Aufgabe mit Hilfe der Theorie operator-analytischer Funktionen von Fage (s. [11]) zu lösen; auch wir werden diesen Weg beschreiten, müssen jedoch zuvor in § 6 in Anlehnung an Fages Theorie "$\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen" untersuchen. Dabei beschränken wir uns bewußt wegen des Umfangs der Theorie "$\tilde{N}^{-1}m$ - analytischer Funktionen" auf diejenigen Ergebnisse, die für die spätere Anwendung auf das Rand-Eigenwertproblem A_1 in § 7 von Bedeutung sind.

§ 6 Eine Theorie "$\tilde{N}^{-1}m$ - analytischer Funktionen"

Wir werden nun eine Funktionenklasse definieren und auf analytische Eigenschaften hin untersuchen. In § 7 wird sich herausstellen, daß diese Funktionenklasse bezüglich der Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_1 bestmöglich gewählt ist.

§ 6.1. $\tilde{N}^{-1}m$ - Basis

Sei U die Randbedingungsmatrix der Randbedingungen (2.6) für $j = m-p+1,\dots,m$:

$$(6.1) \qquad U := \begin{pmatrix} \alpha_{m-p+1,0} & \cdots\cdots & \alpha_{m-p+1,k_{m-p+1}-1} & 1 & 0 \dots 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,0} & \cdots\cdots & \alpha_{m,k_m-1} & 1\ 0 \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und $\tilde{F}(x,0)$ die Wronskimatrix eines Fundamentalsystems $\{\tilde{f}_l(x,0)\}$ $(l = 0,\dots,n-1)$ von $m(y) = 0$:

$$(6.2) \qquad \tilde{F}(x,0) := \begin{pmatrix} \tilde{f}_0 & \cdots\cdots & \tilde{f}_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_0^{(n-1)} & \cdots & \tilde{f}_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}(x,0) \quad .$$

Die aus den letzten (n-p)-ten Spalten von $\tilde{F}(x,0)$ bestehende Teilmatrix bezeichnen wir mit $\tilde{F}_1(x,0)$

$$(6.3) \qquad \tilde{F}_1(x,0) := \begin{pmatrix} \tilde{f}_p & \cdots\cdots & \tilde{f}_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_p^{(n-1)} & \cdots & \tilde{f}_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix}(x,0) \quad .$$

Wir wählen nun $\tilde{F}(x,0)$ so, daß

$$(6.4) \qquad U\cdot\tilde{F}(0,0) = (E_p,\Omega) \quad (\Omega : \text{Nullmatrix}) \quad [1] \ .$$

Dies ist bekanntlich möglich und eindeutig bis auf eine (n-p, n-p)-Matrix; diese wählen wir so, daß

$$(6.5) \qquad J\cdot\tilde{F}_1(0,0) = \begin{pmatrix} T \\ E_{n-p} \end{pmatrix} \qquad [1]$$

gilt mit einer (p,n-p)-Matrix T und einer orthogonalen (n,n)-

[1] Die Anzahl der Zeilen und Spalten der Matrizen möge der Leser aus dem Zusammenhang entnehmen; nur Einheitsmatrizen werden diesbezüglich gekennzeichnet.

Matrix J, deren Elemente

$$(6.6)\qquad j_{s,t} = \begin{cases} 1 & \text{für } t = \begin{cases} k_{m-s+1}+1 & \text{falls } 1 \leq s \leq p \\ i_{s-p}+1 & \text{falls } p+1 \leq s \leq n \end{cases} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sind. Dabei ist:

$$(6.7)\qquad i_1,\ldots,i_{n-p} \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{k_{m-p+1},\ldots,k_m\} \quad .$$

$$(6.8)\qquad i_1 < \ldots < i_{n-p} \quad .$$

Wenn das System $\{\tilde{f}_l(x,0)\}$ $(l = p,\ldots,n-1)$ die Randbedingungen (2.6) für $j = m-p+1,\ldots,m$ erfüllt, genau dann ist (6.4) erfüllt; also ist das System aus dem Definitionsbereich von $\tilde{N}$ über $[0,1]$:

$$(6.9)\qquad \tilde{f}_l(x,0) \in D_{\tilde{N}} \quad (l = p,\ldots,n-1) \quad .$$

Wir definieren nun weitere Funktionen $\tilde{f}_{n-p+l}(x,0)$ $(l = p,\ldots,n-1)$ durch:

$$(6.10)\qquad m(\tilde{f}_{n-p+l}(x,0)) = n(\tilde{f}_l(x,0)) \quad \text{für} \quad l = p,\ldots,n-1 \quad .$$

Die Lösungen $\tilde{f}_{n-p+l}(x,0)$ von (6.10) können und sollen so gewählt werden, daß sie die Anfangsbedingungen

$$(6.11)\qquad \tilde{f}^{(i)}_{n-p+l}(x,0)_{/x=0} = 0 \quad (i = 0,\ldots,n-1;\ l = p,\ldots,n-1)$$

erfüllen. Sei M_o der Operator:

$$(6.12)\qquad M_o y: \left\{ \begin{array}{c} m(y) \\ \\ \vec{y}(0) = \vec{0} \end{array} \right\} \quad \text{mit} \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Dann läßt sich (6.10) wegen (6.9),(6.11) und (6.12) in der Form

$$(6.13)\qquad \tilde{f}_{n-p+l}(x,0) = M_o^{-1}\tilde{N}\,\tilde{f}_l(x,0) \quad \text{für} \quad l = p,\ldots,n-1$$

schreiben, denn der Operator M_o ist bekanntlich invertierbar. Wegen (6.11) gilt:

$$(6.14)\qquad \tilde{f}_{n-p+l}(x,0) \in D_{\tilde{N}} \quad (l = p,\ldots,n-1).$$

Wir definieren nun analog zu (6.10),(6.11),(6.13) rekursiv weitere Funktionen $\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0)$ $(l = p,\ldots,n-1)$ durch die Integralgleichung:

(6.15) $\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0) := M_o^{-1}\tilde{N}\,\tilde{f}_{(h-1)(n-p)+l}(x,0)$

für $h = 1,2,3,\ldots$ und $l = p,\ldots,n-1$,

mit:

(6.16) $\tilde{f}^{(i)}_{h(n-p)+l}(x,0)_{/x=0} = 0 \quad (i = 0,\ldots,n-1;$

$h = 1,2,3,\ldots;\ l = p,\ldots,n-1)$

(6.17) $\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0) \in D_{M_o} \subset D_{\tilde{N}}$ für $h = 1,2,3,\ldots$ und $l = p,\ldots,n-1.$

Aus (6.15) folgt die äquivalente Integrodifferentialgleichung

(6.18) $\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0) = (M_o^{-1}\tilde{N})^h\,\tilde{f}_l(x,0) \quad (h = 0,1,2,\ldots)$

bzw.

(6.19) $\tilde{f}_l(x,0) = (\tilde{N}^{-1}M_o)^h\,\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0) \quad (h = 0,1,2,\ldots)$.

Die Umformung (6.19) ist erlaubt, wenn wir die Invertierbarkeit von $\tilde{N}$ voraussetzen; nach der Anmerkung 2) von Seite 10 ist der Operator $\tilde{N}$ für das Rand-Eigenwertproblem A_o invertierbar.

Definition 6.1: Das durch (6.3)-(6.9) und (6.16)-(6.18) definierte Funktionensystem

(6.20) $\{\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0)\} \quad \left\{ \begin{array}{l} l = 0,\ldots,n-1 \text{ für } h = 0 \\ l = p,\ldots,n-1 \text{ für } h \geq 1 \end{array} \right\}$

heiße "$\tilde{N}^{-1}m$ - Basis".

Um später das Restglied in der Taylorformel abschätzen zu können, benötigen wir eine Abschätzung der Funktionen der $\tilde{N}^{-1}m$ - Basis. Diese gewinnen wir durch Abschätzungen in (6.18) in der Form:

(6.21) $\tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0) = M_o^{-1}(\tilde{N}\,M_o^{-1})^{h-1}\,\tilde{N}\,\tilde{f}_l(x,0) \quad (h = 1,2,3,\ldots)$

Hilfssatz 6.1: Sei $K(x,t)$ die Greensche Funktion des Operators M_o. Dann existiert eine Konstante $C_1 > 0$, unabhängig von x,t,q, so daß für alle $x,t \in [0,1]$ und alle $q = 0,\ldots,n-1$ gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q K(x,t) = \frac{(x-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} + R_q^1(x,t) \quad , \quad \text{mit:}$$

(6.22)
$$|R_q^1(x,t)| \leq C_1 \cdot \frac{|x-t|^{n-q}}{(n-q)!} \quad .$$

(Beweis: S.97).

Hilfssatz 6.2: Sei $Q_h(x,t)$ der Kern des Integraloperators $({}_nM_o^{-1})^h$. Dann existieren Konstanten C_2^o und $C_2^1 > 0$, unabhängig von x,t,h, so daß gilt:

(6.23)
$$Q_h(x,t) = \frac{(x-t)^{h(n-p)-1}}{(h(n-p)-1)!} + P_h(x,t) \quad , \quad \text{mit:}$$

$$|P_h(x,t)| \leq C_2^o \cdot |x-t|^{h(n-p)} \qquad \text{für} \quad x,t \in [0,1]$$

(6.24)
$$|Q_h(x,t)| \leq C_2^1 \cdot \frac{|x-t|^{h(n-p)-1}}{(h(n-p)-1)!} \qquad \text{für} \quad x,t \in [0,1] \quad .$$

Dabei ist:

(6.25)
$$Q_h(x,t) = \int_t^x Q_{h-1}(x,s) \cdot Q(s,t)\, ds \quad ; (h = 2,3,4,\ldots)$$

$$Q_1(x,t) := Q(x,t) := n_x(K(x,t)).$$

(Beweis: S.98).

Satz 6.1: Die Funktionen der $\tilde{N}^{-1}m$ - Basis genügen folgenden Abschätzungen mit von x,h,q,l unabhängigen Konstanten:

a) für $h = 1,2,3,\ldots$; $l = p,\ldots,n-1$; $q = 0,\ldots,n-1$ gilt:

(6.26)
$$\left|\tilde{f}^{(q)}_{h(n-p)+l}(x,0)\right| \leq C_{o1} \cdot \frac{x^{h(n-p)+p-q}}{(h(n-p)+p-q)!} \qquad \text{für alle} \quad x \in [0,1]$$

b) für $h = 0$; $l = 0,\ldots,n-1$; $q = 0,\ldots,n-1$ gilt:

(6.27)
$$\left|\tilde{f}^{(q)}_1(x,0)\right| \leq C_{o2} \qquad \text{für alle} \quad x \in [0,1] \quad .$$

(Beweis: S.100).

Schließlich erhalten wir noch aus (6.16),(6.18) und

(6.28)
$$m(\tilde{f}_l) = 0 \qquad \text{für} \quad l = 0,\ldots,n-1 \quad :$$

Hilfssatz 6.3: Es gilt für $r = 0,\ldots,n-1$; $l = p,\ldots,n-1$; $h = 0,1,\ldots$

(6.29)
$$D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q \tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0)_{/x=0} = \begin{cases} \tilde{f}_l^{(r)}(x,0)_{/x=0} & \text{für } q = h \\ 0 & \text{für } q \neq h \end{cases} ;$$

Aus (6.5),(6.6) folgt:

$$(6.30)\qquad \tilde{f}_l^{(i_j)}(x,0)_{/x=0} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = j+p-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(j = 1,\ldots,n-p;\ l = p,\ldots,n-1).$

§ 6.2. Taylorformel

Sei $f(x)$ aus dem Definitionsbereich des Operators $D^{i_{r-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^q$ auf $[0,1]$ mit $r = p,\ldots,n-1$ und $q = 0,1,2,\ldots$. Sei außerdem:

$$(6.31)\qquad f(x) \in D_{\tilde{N}} \ .$$

Wir definieren Koeffizienten $\tilde{a}_{h(n-p)+l}$ $(l = p,\ldots,n-1)$ durch:

$$(6.32)\qquad \begin{pmatrix} D^0(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \\ \vdots \\ D^{n-1}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \end{pmatrix}_{/\ x=0} = \tilde{F}_1(0,0) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{a}_{h(n-p)+p} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{h(n-p)+n-1} \end{pmatrix}$$

für $h = 0,\ldots,q-1$.

Durch Multiplikation von links mit J geht (6.32) in die äquivalente Form über: $(h = 0,\ldots,q-1)$

$$(6.33)\qquad \begin{pmatrix} D^{k_m}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \\ \vdots \\ D^{k_{m-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \\ D^{i_1}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \\ \vdots \\ D^{i_{n-p}}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \end{pmatrix}_{/\ x=0} = \begin{pmatrix} T \\ E_{n-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{h(n-p)+p} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{h(n-p)+n-1} \end{pmatrix}$$

Die Darstellung (6.32) folgt unmittelbar aus (6.4),(6.5) und

$$(6.34)\qquad (\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) \in D_{\tilde{N}} \quad \text{für } h = 0,\ldots,q-1 \ .$$

Damit ist klar, daß durch (6.32) die Koeffizienten $\tilde{a}_{h(n-p)+l}$ $(l = p,\ldots,n-1)$ eindeutig bestimmt sind; aus (6.33) folgt:

$$(6.35)\qquad \tilde{a}_{h(n-p)+l} := D^{i_{l-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)_{/x=0} \ ; \begin{cases} h = 0,\ldots,q-1 \\ l = p,\ldots,n-1 \end{cases}.$$

Analog zu (6.35) definieren wir im Falle h = q:

$$(6.36)\qquad \tilde{a}_{q(n-p)+l} := D^{i_{l-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^q\, f(x)_{/x=0} \quad ; (l = p,\dots,r).$$

Nun setzen wir: (Taylorformel)

$$(6.37)\qquad f(x) = \sum_{h=0}^{q-1}\sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{h(n-p)+l}\cdot \tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0) +$$

$$+ \sum_{l=p}^{r} \tilde{a}_{q(n-p)+l}\cdot \tilde{f}_{q(n-p)+l}(x,0) + \tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0)\ ,$$

und definieren:

$$(6.38)\qquad \tilde{h}_{q(n-p)+r}(x,0) := D^{i_{r-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^q\, f(x) -$$

$$- \sum_{l=p}^{r} \tilde{a}_{q(n-p)+l}\cdot \tilde{f}_{l}^{(i_{r-p+1})}(x,0)\ .$$

Indem wir die Taylorformel (6.37) in (6.38) einsetzen und nach dem Restglied auflösen, erhalten wir eine Abschätzung für das Restglied:

Satz 6.2: Sei f(x) aus dem Definitionsbereich des Operators $D^{i_{r-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^q$ auf $[0,1]$ mit $p \le r \le n-1$ und $q = 0,1,2,\dots$; sei ferner $f(x) \in D_{\tilde{N}}$. Dann existieren Konstanten C_3 und H_{1w}, unabhängig von x,q,r, so daß gilt mit $j(r) := \max(i_{r-p+1},p)$:

$$(6.39)\qquad \left|\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0)\right| \le C_3\cdot \frac{x^{q(n-p)+j(r)}}{(q(n-p)+j(r))!}\cdot$$

$$\cdot \sum_{w=0}^{j(r)-i_{r-p+1}} H_{1w}\cdot \max_{0\le t\le x}\left|D^w \tilde{h}_{q(n-p)+r}(t,0)\right| \quad ;$$

für alle $x \in [0,1]$; r = p,...,n-1; q = 1,2,3,... ; für q = 0 ist (6.39) richtig, wenn man $j(r) = i_{r-p+1}$ in jedem Falle setzt!

(Beweis: S.100).

Als nächstes geben wir Bedingungen dafür an, daß die Taylorreihe

$$(6.40)\qquad \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_{\mu}\cdot \tilde{f}_{\mu}(x,0) \qquad (\mu := h(n-p)+l)$$

absolut und gleichmäßig konvergiert.

§ 6.3. Taylorreihe

Definition 6.2: f(x) sei aus dem Definitionsbereich des Operators $D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q$ auf $\{\alpha_o,\beta_o\}$ [1]) ($r = 0,\dots,n-1$; $q = 0,1,2,\dots$). f(x) heißt dann "$\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $\{\alpha_o,\beta_o\}$", wenn zu jedem abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset \{\alpha_o,\beta_o\}$ eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(\alpha,\beta,f)$, unabhängig von r,q, existiert, so daß

$$|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)| \leq \tilde{C}^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)! \tag{6.41}$$

für alle $x \in [\alpha,\beta]$ und $q = 0,1,2,\dots$; $r = 0,\dots,n-1$ (ausgenommen $r = q = 0$) gilt.

Satz 6.3: Seien $\tilde{a}_\mu$ ($\mu = p,p+1,p+2,\dots$) "analytische Majoranten", d.h.

$$|\tilde{a}_\mu| \leq C_o^\mu \cdot \mu! \quad \text{für } \mu \geq \mu_o \tag{6.42}$$

mit einer Konstanten $C_o > 0$.

Dann gelten folgende Aussagen:

1) Die Reihe

$$f(x) := \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot \tilde{f}_\mu(x,0) \tag{6.43}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Intervall

$$[0,d] \subset [0,\delta\} := [0,\tilde{R}) \cap [0,1] \tag{6.44}$$

wobei gilt:

$$\tilde{R}^{-1} := e \cdot \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \cdot \sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu|} \quad ; \text{ (e = Eulersche Zahl).} \tag{6.45}$$

2) f(x) ist aus dem Definitionsbereich des Operators $D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q$ auf $[0,\delta\}$ für $r = 0,\dots,n-1$; $q = 0,1,2,\dots$, und die Reihen

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q \tilde{f}_\mu(x,0) \quad \begin{Bmatrix} r = 0,\dots,n-1 \\ q = 0,1,2,\dots \end{Bmatrix} \tag{6.46}$$

konvergieren absolut und gleichmäßig in jedem Intervall $[0,d]$, so daß gilt:

---

[1]) { , } bedeutet ein offenes, halboffenes oder abgeschlossenes Intervall.

(6.47) $$D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x) = \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q \tilde{f}_\mu(x,0) \quad .$$

3) Für die Koeffizienten $\tilde{a}_\mu$ gilt:

(6.48) $$\tilde{a}_\mu = D^{i_{l-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)_{/x=0} \quad \text{mit} \quad \mu = h(n-p)+l .$$

4) $f(x)$ ist eine $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $[0,\delta\}$.

5) Für alle $q = 0,1,2,\ldots$ gilt:

(6.49) $$(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x) \in D_{\tilde{N}} \text{ über } [0,\delta\} \ .$$

(Beweis: S.103).

Wir sind nun in der Lage, mit Hilfe der Restgliedabschätzung in Satz 6.2 und den Eigenschaften der Taylorreihe in Satz 6.3 zu zeigen, daß eine $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktion $f(x)$ mit $f(x) \in D_{\tilde{N}}$ nicht nur im Punkte $x = 0$, sondern in einer ganzen Umgebung des Nullpunktes durch die zugehörige Taylorreihe dargestellt wird:

§ 6.4. Lokaler Entwicklungssatz

Satz 6.4: Sei $f(x)$ eine $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $[0,\beta_0\}$, d.h. es gibt eine Konstante $\tilde{C} = \tilde{C}(\beta,f) > 0$, so daß

(6.50) $$\left|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right| \leq \tilde{C}^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)!$$

für alle x und β mit $x \in [0,\beta] \subset [0,\beta_0\}$ und alle q,r in Definition 6.2.
Sei ferner $f(x) \in D_{\tilde{N}}$ und

(6.51) $$\tilde{a}_\mu = \tilde{a}_{h(n-p)+l} := D^{i_{l-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)_{/x=0}$$

mit $h = 0,1,2,\ldots$; $l = p,\ldots,n-1$; also: $\mu = p,p+1,\ldots$
Dann gilt:

(6.52) $$f(x) = \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot \tilde{f}_\mu(x,0)$$

für alle $x \in [0,\tilde{C}^{-1}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1]$; die Reihe in (6.52) konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0,\tilde{C}^{-1}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1]$.

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen, daß das Restglied in der Taylorformel (6.37) in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0,\tilde{C}^{-1}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1]$ für $(q(n-p)+r) \to \infty$ gleichmäßig zu Null strebt; dazu schätzen wir $\tilde{h}_{q(n-p)+r}(x,0)$ in (6.38) ab. Zunächst folgt aus (6.50),(6.51):

$$(6.53) \qquad |\tilde{a}_{h(n-p)+l}| \leq \tilde{C}^{h(n-p)+i_{l-p+1}} \cdot (h(n-p)+i_{l-p+1})!$$

für $h = 0,1,2,\ldots;\ l = p,\ldots,n-1.$

Beachten wir die Abschätzungen (6.50),(6.53) und (6.27), so folgt für (6.38)

$$(6.54) \quad \left| D^w \tilde{h}_{q(n-p)+r}(x,0) \right| \leq \tilde{C}^{q(n-p)+j(r)} \cdot (q(n-p)+j(r))! +$$

$$+ (r-p)\tilde{C}^{q(n-p)+i_{r-p+1}} (q(n-p)+i_{r-p+1})! \cdot C_{02} \qquad ^{1})$$

für alle x und β mit $x \in [0,\beta] \subset [0,\beta_0\} \cap [0,1]$.

Dies in (6.39) eingesetzt ergibt:

$$(6.55) \qquad \left| \tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0) \right| \leq C_{03} \cdot (\tilde{C} \cdot x)^{q(n-p)+j(r)}$$

mit einer von x,q,r unabhängigen Konstanten C_{03} ,

für alle $x \in [0,\beta]$ und $q = 0,1,2,\ldots;\ r = p,\ldots,n-1.$

Aus (6.55) folgt sofort:

$$(6.56) \qquad \tilde{R}_\nu(x,0) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \text{ gleichmäßig in } [0,\tilde{C}^{-1}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1] \ .$$

Wegen $\tilde{R}^{-1} \leq \tilde{C}$ folgt deshalb die Behauptung aus Satz 6.3.-

Dieser Entwicklungssatz 6.4 erlaubt leider nur die Entwicklung einer $\tilde{N}^{-1}m$ - analytischen Funktion auf $[0,\tilde{C}^{-1}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1]$ und nicht, wie es nach Satz 6.3 wünschenswert erscheint, auf dem Intervall $[0,\tilde{R}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1]$; dieses Ziel läßt sich unter weiteren Voraussetzungen an die zu entwickelnde Funktion mit Hilfe der Identitätssätze für reell-analytische bzw. holomorphe Funktionen zwar erreichen. Jedoch wollen wir ohne Einschränkung der Voraussetzung an $f(x)$, sondern unter der Bedingung (2.51) analytische Fortsetzbarkeit und einen Identitätssatz beweisen.-

---

[1]) Diese Abschätzung gilt für $\tilde{C} \geq 1$; analog für $\tilde{C} < 1$!

§ 6.5. Verallgemeinerte Basis: die $N_{x_o}^{-1}m$ - Basis

Sei $x_o \in [0,1]$ beliebig, aber fest gewählt; sei weiterhin analog zu (6.12) der für alle x_o invertierbare Operator definiert:

$$(6.57) \qquad M_{x_o} y : \left\{ \begin{array}{l} m(y) \\ \\ \vec{y}(x_o) = 0 \end{array} \right\}$$

An die Stelle des Operators $\tilde{N}$ in § 6.1. tritt nun der für alle x_o invertierbare Operator N_{x_o}:

$$(6.58) \qquad N_{x_o} y : \left\{ \begin{array}{l} n(y) \\ \\ y^{(p-1)}(x_o) = \ldots = y(x_o) = 0 \end{array} \right\}$$

so daß $D_{M_{x_o}} \subset D_{N_{x_o}}$ gilt; dann können wir mit Hilfe eines Fundamentalsystems $\{f_l(x,x_o)\}$ $(l = 0,\ldots,n-1)$ von $m(y) = 0$ analog zu (6.15) Funktionen $f_{h(n-p)+l}(x,x_o)$ $(l = p,\ldots,n-1)$ definieren:

$$(6.59) \qquad f_{h(n-p)+l}(x,x_o) := M_{x_o}^{-1} N_{x_o} f_{(h-1)(n-p)+l}(x,x_o)$$

für $h = 1,2,3,\ldots$ und $l = p,\ldots,n-1$

mit den folgenden Eigenschaften:

$$(6.60) \qquad f^{(i)}_{h(n-p)+l}(x,x_o)\big/_{x=x_o} = 0 \quad (i = 0,\ldots,n-1;\ h = 1,2,3,\ldots;\ l = p,\ldots,n-1)$$

$$(6.61) \qquad f_l^{(i)}(x,x_o)\big/_{x=x_o} = 0 \quad (i = 0,\ldots,p-1;\ l = p,\ldots,n-1)$$

Aus (6.59) folgt die äquivalente Integrodifferentialgleichung:

$$(6.62) \qquad f_{h(n-p)+l}(x,x_o) = (M_{x_o}^{-1}N_{x_o})^h f_l(x,x_o) \quad (h = 0,1,2,\ldots)$$

bzw.

$$(6.63) \qquad f_l(x,x_o) = (N_{x_o}^{-1}M_{x_o})^h f_{h(n-p)+l}(x,x_o) \quad (h = 0,1,2,\ldots)$$

Definition 6.3: Das durch (6.62) und $m(f_l) = 0$ $(l = 0,\ldots,n-1)$ definierte Funktionensystem

$$(6.64) \qquad \left\{f_{h(n-p)+l}(x,x_o)\right\} \ ; \ \left\{ \begin{array}{l} l = 0,\ldots,n-1 \text{ für } h = 0 \\ l = p,\ldots,n-1 \text{ für } h \geq 1 \end{array} \right\}$$

heiße "$N_{x_o}^{-1}m$ - Basis".

Da zu jedem x_o ein Fundamentalsystem $\{f_l(x,x_o)\}$ $(l = 0,\ldots,n-1)$ von $m(y) = 0$ existiert, dessen Wronskimatrix gleich der Einheitsmatrix ist, können wir die Basisfunktionen $f_l(x,x_o)$ $(l = p, \ldots,n-1)$ stets in der folgenden Art normieren:

$$(6.65)\qquad D^r f_l(x,x_o)_{/x=x_o} = \delta_{rl} \qquad (r,l = 0,\ldots,n-1)\ .$$

Damit erhalten wir mit (6.60),(6.61),(6.62) und

$$(6.66)\qquad m(f_l) = 0 \quad \text{für} \quad l = 0,\ldots,n-1 \ :$$

Hilfssatz 6.4: Es gilt für $r = 0,\ldots,n-1$; $l = p,\ldots,n-1$; $h = 0, 1,2,\ldots$:

$$(6.67)\qquad D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q f_{h(n-p)+l}(x,x_o)_{/x=x_o} = \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{rl} & \text{für } q = h \\ 0 & q \neq h \end{array} \right\}\ .$$

Schreiben wir (6.62) analog zu (6.21) in der Form

$$(6.68)\qquad f_{h(n-p)+l}(x,x_o) = M_{x_o}^{-1}(N_{x_o} M_{x_o}^{-1})^{h-1} N_{x_o} f_l(x,x_o)\ ; \quad (h=1,2,3,..)$$

und berücksichtigen, daß der Kern des Integraloperators $M_{x_o}^{-1}$ im Intervall $[x_o,x]$ bzw. $[x,x_o]$ durch $K(x,t)$ in (8.195) gegeben ist, so daß mit (6.68) analog zu (8.216) gilt:

$$(6.69)\qquad f^{(q)}_{h(n-p)+l}(x,x_o) = \int_{x_o}^{x} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q K(x,t) \int_{x_o}^{t} Q_{h-1}(t,s)\, N_{x_o} f_l(s,x_o) \cdot ds\, dt$$

und damit die Hilfssätze 6.1 und 6.2 auf M_{x_o} für alle x_o anwendbar sind, so gelangen wir zu Abschätzungen der Basisfunktionen in (6.69) analog zu Satz 6.1:

Satz 6.5: Die Funktionen der $N_{x_o}^{-1}m$ - Basis genügen folgenden Abschätzungen mit von x, h, l, q unabhängigen Konstanten $C_{o4} = C_{o4}(x_o)$, $C_{o5} = C_{o5}(x_o)$, $C_{o6} = C_{o6}(x_o)$:

a) für $h = 1,2,3,\ldots$; $l = p,\ldots,n-1$; $q = 0,\ldots,n-1$ gilt:

$$(6.70)\qquad \left| f^{(q)}_{h(n-p)+l}(x,x_o) \right| \leq C_{o4} \frac{|x-x_o|^{h(n-p)+l-q}}{(h(n-p)+l-q)!} \quad ; \ x,x_o \in [0,1]$$

b) für $h = 0$; $l = 0,\dots,n-1$; $q = 0,\dots,l$ gilt:

$$(6.71)\qquad \left|f_l^{(q)}(x,x_o)\right| \le C_{05}\,\frac{|x-x_o|^{l-q}}{(l-q)!} \quad \text{für alle } x,x_o \in [0,1]\ ;$$

c) für $h = 0$; $l = 0,\dots,n-1$; $q = 0,\dots,n$ gilt:

$$(6.72)\qquad \left|f_l^{(q)}(x,x_o)\right| \le C_{06} \quad \text{für alle } x,x_o \in [0,1]\ .$$

Beweis: Wir entwickeln die Funktionen des Fundamentalsystems $\{f_l(x,x_o)\}$ für $l = 0,\dots,n-1$ nach Taylor um $x = x_o$:

$$(6.73)\qquad f_l^{(q)}(x,x_o) = \frac{(x-x_o)^{l-q}}{(l-q)!} + f_l^{(n)}(\xi_{lq},x_o)\cdot\frac{(x-x_o)^{n-q}}{(n-q)!}$$

für $l = 0,\dots,n-1$; $q = 0,\dots,l$.

mit Zwischenwerten $\xi_{lq} \in [x,x_o]$ bzw. $[x_o,x]$. Daraus folgen unmittelbar (6.71) und (6.72); ebenso folgt:

$$(6.74)\qquad N_{x_o} f_l(x,x_o) = \frac{(x-x_o)^{l-p}}{(l-p)!} + \alpha_l(x,x_o) \qquad \text{für } l = p,\dots,n-1$$

mit:

$$(6.75)\qquad \left|\alpha_l(x,x_o)\right| \le C_4\,\frac{|x-x_o|^{l-p+1}}{(l-p+1)!} \qquad \text{für } l = p,\dots,n-1$$

$$(6.76)\qquad C_4 := (1+C_{06})\cdot \max_{0 \le x \le 1}\left(1 + |g_1(x)| + \dots + |g_p(x)|\right) - 1$$

und daraus die Abschätzung für $l = p,\dots,n-1$:

$$(6.77)\qquad \left|N_{x_o} f_l(x,x_o)\right| \le C_5\cdot\frac{|x-x_o|^{l-p}}{(l-p)!}\ ;(C_5 := 1 + C_4)\ .$$

Indem wir anstelle von (8.217) diese Abschätzung (6.77) verwenden, ergibt sich auf dem gleichen Weg wie im Beweis von Satz 6.1 (S.100) aus (6.69) die Behauptung (6.70).-

§ 6.6. Verallgemeinerte Taylorformel

Sei $g(x)$ aus dem Definitionsbereich des Operators $D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q$ auf $[0,1]$ mit $r = p,\dots,n-1$ und $q = 0,1,2,\dots$. Sei außerdem:

(6.78) $$g(x) \in D_{N_{x_o}} .$$

Wir definieren Koeffizienten:

(6.79) $$a_{h(n-p)+l} := D^l(N_{x_o}^{-1}m)^h \, g(x)_{/x=x_o}$$

für $h = 0,\ldots,q-1$: $l = p,\ldots,n-1$;
und $h = q$: $l = p,\ldots,r$.

Nun setzen wir entsprechend (6.37):
(Verallgemeinerte Taylorformel)

(6.80) $$g(x) = \sum_{h=0}^{q-1} \sum_{l=p}^{n-1} a_{h(n-p)+l} \, f_{h(n-p)+l}(x,x_o) +$$

$$+ \sum_{l=p}^{r} a_{q(n-p)+l} \, f_{q(n-p)+l}(x,x_o) + R_{q(n-p)+r}(x,x_o)$$

und definieren:

(6.81) $$h_{q(n-p)+r}(x,x_o) := D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q \, g(x) -$$

$$- \sum_{l=p}^{r} a_{q(n-p)+l} \, f_l^{(r)}(x,x_o) .$$

Indem wir die Taylorformel (6.80) in (6.81) einsetzen, erhalten wir:

(6.82) $$h_{q(n-p)+r}(x,x_o) = D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q \, R_{q(n-p)+r}(x,x_o)$$

wie wir aus (6.59) und (6.66) ablesen. Durch Auflösen dieser Gleichung nach $R_{q(n-p)+r}(x,x_o)$ ist eine Abschätzung des verallgemeinerten Taylorschen Restgliedes möglich:

Satz 6.6: Sei $g(x)$ aus dem Definitionsbereich des Operators $D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q$ auf $[0,1]$ mit $q = 0,1,2,\ldots$ und $r = p,\ldots,n-1$; sei ferner $g(x) \in D_{N_{x_o}}$. Dann existiert eine Konstante $C_6 = C_6(x_o)$, unabhängig von x,q,r, so daß:

(6.83) $$\left|R_{q(n-p)+r}(x,x_o)\right| \leq C_6 \frac{|x-x_o|^{q(n-p)+r}}{(q(n-p)+r)!} \max_{t\in[x_o,x]} \left|h_{q(n-p)+r}(t,x_o)\right|$$

für alle $x,x_o \in [0,1]$; $q = 0,1,2,\ldots$; $r = p,\ldots,n-1$.

Beweis: Die aus (6.59) und (6.66) folgende Beziehung

$$(6.84)\qquad D^l(N_{x_o}^{-1}m)^h f_{k(n-p)+t}(x,x_o) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } h > k \\ D^l f_{(k-h)(n-p)+t}(x,x_o) & \text{für } h \leq k \end{array} \right\}$$

$(h,k = 0,1,2,\ldots;$
$t = p,\ldots,n-1;\ l = 0,\ldots,n-1)$

liefert uns nach Anwenden des Operators $D^l(N_{x_o}^{-1}m)^h$ auf (6.80) und Einsetzen von (6.67) die Anfangsbedingungen des Taylorschen Restgliedes analog zu (8.227),(8.228):

$$(6.85)\qquad (N_{x_o}^{-1}m)^{\varkappa} R_{q(n-p)+r}(x,x_o) \in D_{M_{x_o}} \qquad \text{für } \varkappa = 0,\ldots,q-1$$

und

$$(6.86)\qquad D^{\tau}(N_{x_o}^{-1}m)^q R_{q(n-p)+r}(x,x_o)_{/x=x_o} = 0 \quad \text{für } \tau = 0,\ldots,r\ .$$

Man überzeugt sich leicht davon, daß der weitere Beweis analog zum Beweis von Satz 6.2 (S.100f.) verläuft, wenn man nur i_{r-p+1} durch r ersetzt und die Integrationen bei x_o statt 0 beginnt; man erhält also mit

$$(6.87)\qquad \tilde{D}_{x_o}^r y : \left\{ \begin{array}{l} D^r(y) \\ y(x_o) = \ldots = y^{(r-1)}(x_o) = 0 \end{array} \right\}$$

aus (6.82):

$$(6.88)\qquad \tilde{D}_{x_o}^r (N_{x_o}^{-1}M_{x_o})^q R_{q(n-p)+r}(x,x_o) = h_{q(n-p)+r}(x,x_o)$$

und wegen der Invertierbarkeit des Operators (6.87) nach Auflösen:

$$(6.89)\qquad R_{q(n-p)+r}(x,x_o) = (M_{x_o}N_{x_o}^{-1})^q \tilde{D}_{x_o}^{-r} h_{q(n-p)+r}(x,x_o) =$$

$$= \int_{x_o}^{x} K(x,t) \int_{x_o}^{t} Q_{q-1}(t,s) \cdot N_{x_o s} \int_{x_o}^{s} T_r(s,u) \cdot h_{q(n-p)+r}(u,x_o)\,du\,ds\,dt$$

mit

$$(6.90)\qquad T_r(x,t) := \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} \qquad \text{für } t \in [x_o,x]\ ,$$

woraus durch Überlegungen analog zu (8.233)-(8.235) die Behauptung (6.83) folgt.-

Wir werden jetzt Bedingungen dafür angeben, daß die verallgemeinerte Taylorreihe

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} a_\mu \cdot f_\mu(x,x_o) \qquad (\mu := h(n-p)+1) \tag{6.91}$$

absolut und gleichmäßig konvergiert.

§ 6.7. Verallgemeinerte Taylorreihe

Satz 6.7: Seien a_μ $(\mu = p,p+1,p+2,\ldots)$ analytische Majoranten:

$$|a_\mu| \le C_o^{\mu} \cdot \mu! \quad \text{für } \mu \ge \mu_o \tag{6.92}$$

mit einer Konstanten $C_o > 0$.

Dann gelten folgende Aussagen:

1) Die Reihe

$$g(x) := \sum_{\mu=p}^{\infty} a_\mu \cdot f_\mu(x,x_o) \tag{6.93}$$

konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Intervall

$$\left[c_{x_o},d_{x_o}\right] \subset \left\{\gamma_{x_o},\delta_{x_o}\right\} := (x_o-R_{x_o},x_o+R_{x_o}) \cap [0,1] \tag{6.94}$$

mit

$$R_{x_o}^{-1} := e \cdot \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|a_\mu|} \quad . \tag{6.95}$$

2) $g(x)$ ist aus dem Definitionsbereich des Operators $D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q$ auf $\left\{\gamma_{x_o},\delta_{x_o}\right\}$ für $r = 0,\ldots,n-1$; $q \ge 0$, und die Reihen

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} a_\mu D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q f_\mu(x,x_o) \quad \begin{cases} r = 0,\ldots,n-1 \\ q = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{6.96}$$

konvergieren absolut und gleichmäßig in $\left[c_{x_o},d_{x_o}\right]$, so daß gilt:

$$D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q\, g(x) = \sum_{\mu=p}^{\infty} a_\mu D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q f_\mu(x,x_o) \quad . \tag{6.97}$$

3) Für die Koeffizienten a_μ gilt:

(6.98) $a_\mu = D^l(N_{x_0}^{-1}m)^h g(x)\big/_{x=x_0}$ mit $\mu = h(n-p)+l$

4) Es gibt eine Konstante $C = C(c_{x_0}, d_{x_0}, x_0, C_0)$, so daß

(6.99) $\left|D^r(N_{x_0}^{-1}m)^q g(x)\right| \leq C^{q(n-p)+r}\cdot(q(n-p)+r)!$

für alle $x \in \left[c_{x_0}, d_{x_0}\right]$ und alle $q \geq 0$, $r = 0,\ldots,n-1$. [1])

Beweis: 1),2),4) Er verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 6.3: aus (6.92) und (6.95) schließen wir:

(6.100) $R_{x_0} \geq C_0^{-1} > 0$ für alle $x_0 \in [0,1]$,

und weiterhin analog zu (8.237)-(8.242):

(6.101) $|a_\mu| \leq B_{x_0}^{\mu}\cdot\mu!$ für $\mu \geq \mu_3$.

Die folgenden Überlegungen (S.104 ff.) lassen sich vollständig auf die Reihen (6.93)-(6.97) übertragen; man kann sogar wegen der im Vergleich zu (6.26) besseren Abschätzung (6.70) in (8.244) $\mu \geq q(n-p)+r$ wählen.

3) Diese Aussage entnehmen wir (6.97),(6.65) und Hilfssatz 6.4.-

Entsprechend § 6.4. können wir nun eine lokale Entwicklung nachweisen:

§ 6.8. Verallgemeinerter lokaler Entwicklungssatz

Satz 6.8: Sei $g(x) \in D_{N_{x_0}}$, und $g(x)$ erfülle eine Abschätzung der Art (6.99) für alle $x \in \left[a_{x_0}, b_{x_0}\right] \subset \{\alpha_{x_0}, \beta_{x_0}\}$ und alle q,r:

(6.102) $\left|D^r(N_{x_0}^{-1}m)^q g(x)\right| \leq C^{q(n-p)+r}\cdot(q(n-p)+r)!$

mit einer Konstanten $C = C(a_{x_0}, b_{x_0}, x_0, g)$. Dann gilt:

(6.103) $$g(x) = \sum_{\mu=p}^{\infty} a_\mu \cdot f_\mu(x,x_0) ,$$

mit den Koeffizienten a_μ definiert durch (6.98), für alle $x \in \Delta_0(x_0)$:

(6.104) $\Delta_0(x_0) := (x_0 - C^{-1}, x_0 + C^{-1}) \cap \{\alpha_{x_0}, \beta_{x_0}\} \cap [0,1]$;

[1]) $q = r = 0$ ausgeschlossen.

die Reihe (6.103) konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $\Delta_o(x_o)$.

Beweis: Er verläuft analog zum Beweis von Satz 6.4: wegen (6.102) und (6.98) gilt:

$$(6.105) \qquad |a_\mu| \leq C^{h(n-p)+1} \cdot (h(n-p)+1)! \quad ,$$

so daß aus (6.102),(6.105) und (6.72) für (6.81) folgt:

$$(6.106) \qquad \left| h_{q(n-p)+r}(x,x_o) \right| \leq C^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)!(1+(r-p)C_{06}),$$

für alle $x \in \left[a_{x_o}, b_{x_o} \right] \subset \left\{ \alpha_{x_o}, \beta_{x_o} \right\} \cap [0,1]$. [1]

Durch Einsetzen dieser Abschätzung in (6.83) ergibt sich dann über (6.80) analog zu (6.55),(6.56) die Behauptung des Satzes.-

Sei $f(x)$ aus dem Definitionsbereich des Operators $D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q$ auf dem Intervall $\{\alpha_o,\beta_o\}$ für alle $q \geq 0$, $r = 0,\ldots,n-1$ und für alle $x_o \in \{\alpha_o,\beta_o\}$. Dann definieren wir entsprechend Definition 6.2:

Definition 6.4: $f(x)$ heißt dann "$N_{x_o}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $\{\alpha_o,\beta_o\}$ ", wenn zu jedem abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha,\beta] \subset \{\alpha_o,\beta_o\}$ eine Konstante $C = C(\alpha,\beta,f)$, unabhängig von r,q,x,x_o, existiert, so daß

$$(6.107) \qquad \left| D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q f(x) \right| \leq C^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)! \qquad [2]$$

für alle $x,x_o \in [\alpha,\beta]$ und $q \geq 0$, $r = 0,\ldots,n-1$ [3] gilt.

Sei also $f(x)$ $N_{x_o}^{-1}m$ - analytisch auf $\{\alpha_o,\beta_o\}$. Für jedes beliebige, aber fest gewählte $x_o \in \{\alpha_o,\beta_o\}$ definieren wir:

$$(6.108) \qquad g(x) := N_{x_o}^{-1}m(f)(x) \quad .$$

Wegen (6.107) erfüllt $g(x)$ die Abschätzung:

$$(6.109) \qquad \left| D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q g(x) \right| \leq (2C)^{q(n-p)+r} \cdot (q(n-p)+r)! \cdot (2C)^{n-p} (n-p)!$$

---

[1] O.B.d.A. sei $C \geq 1$.

[2] Die x_o-Unabhängigkeit der Konstanten C braucht nicht vorausgesetzt zu werden, da sie aus der Stetigkeit der linken Seite in x_o folgt.

[3] $q=r=0$ ausgenommen.

für alle $x, x_o \in [\alpha, \beta]$ und $q \geq 0$, $r = 0,\ldots,n-1$ [1])
mit der Konstanten C aus der Abschätzung (6.107).

In der Abschätzung (6.109) wurde (8.108) angewandt. Nach Satz 6.8 gilt dann:

$$(6.110) \quad g(x) = \sum_{\mu=p}^{\infty} a_\mu \cdot f_\mu(x,x_o) \quad \text{für alle } x \in \Delta(x_o) \text{ mit:}$$

$$(6.111) \quad \Delta(x_o) := (x_o - \tfrac{1}{2C}, x_o + \tfrac{1}{2C}) \cap \{\alpha_o, \beta_o\} \cap [0,1] \quad .$$

Durch Auflösen der Gleichung (6.108) und Einsetzen von (6.110) erhalten wir:

$$(6.112) \quad m(f)(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} a_{h(n-p)+l} \cdot N_{x_o} f_{h(n-p)+l}(x,x_o) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} a_{h(n-p)+l} \cdot m(f_{(h+1)(n-p)+l})(x,x_o)$$

(letzte Gleichung folgt aus (6.59)) und weiter mit (6.66):

$$(6.113) \quad f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} a_{h(n-p)+l} \cdot f_{(h+1)(n-p)+l}(x,x_o) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{n-1} a_l^o \cdot f_l(x,x_o) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^o \cdot f_\mu(x,x_o); \; x \in \Delta(x_o)$$

$$\text{mit } \mu = h(n-p)+l; \; l = 0,\ldots,n-1 \text{ für } h = 0;$$
$$l = p,\ldots,n-1 \text{ für } h \geq 1,$$

und mit:

$$(6.114) \quad a^o_{h(n-p)+l} := a_{(h-1)(n-p)+l} = D^l (N_{x_o}^{-1} m)^h f(x) \Big/_{x=x_o} \quad .$$

Anmerkung: Entsprechend (6.108) und (6.113) läßt sich natürlich auch für $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen f(x) mit $f(x) \notin D_{\tilde{N}}$ aus Satz 6.4 ein lokaler Entwicklungssatz ableiten.-

Wir sind nun in der Lage, den Identitätssatz für $N_{x_o}^{-1}m$ - analytische Funktionen zu beweisen:

§ 6.9. Identitätssatz

Satz 6.9: Zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ seien $N_{x_o}^{-1}m$ - analytisch auf $\{\alpha_o, \beta_o\} \subset [0,1]$; sie sind dort gleich, falls sie eine der folgenden hinreichenden Bedingungen erfüllen:

[1]) q=r=0 ausgenommen.

1) $f_1(x) = f_2(x)$ für $x \in \{a,b\} \subset \{\alpha_o,\beta_o\}$;

2) in einem beliebigen Punkte $x_o^* \in \{\alpha_o,\beta_o\}$ gilt:

(6.115) $$D^r(N_{x_o^*}^{-1}m)^q f_1(x)_{/x=x_o^*} = D^r(N_{x_o^*}^{-1}m)^q f_2(x)_{/x=x_o^*}$$

$(q = 0,1,2,\ldots;\ r = 0,\ldots,n-1)$;

3) $f_1(x_i) = f_2(x_i)$ für eine Punktfolge $x_1,x_2,x_3,\ldots$, die gegen einen inneren Punkt $x_o^* \in \{\alpha_o,\beta_o\}$ strebt.

(Beweis: S.106).

§ 6.10. Globale Entwicklungssätze

Die Sätze 6.7, 6.8 und 6.9 ermöglichen uns den Beweis des folgenden Entwicklungssatzes:

Satz 6.10: $f(x)$ sei $N_{x_o}^{-1}m$ - analytisch auf $\{\alpha_o,\beta_o\}$. Dann läßt sich $f(x)$ in eine verallgemeinerte Taylorreihe nach der $N_{x_o^*}^{-1}m$ - Basis $\{f_\mu(x,x_o^*)\}_{\mu=0}^{\infty}$ um $x = x_o^* \in \{\alpha_o,\beta_o\}$ entwickeln:

(6.116) $$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^o \cdot f_\mu(x,x_o^*)$$

für $x \in (x_o^* - R_{x_o^*}, x_o^* + R_{x_o^*}) \cap \{\alpha_o,\beta_o\} \cap [0,1]$.

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall.

Für den Konvergenzradius $R_{x_o^*}$ gilt:

(6.117) $$R_{x_o^*}^{-1} = e \cdot \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu}\sqrt[\mu]{|a_\mu^o|} \quad ;$$

und für die Koeffizienten:

(6.118) $$a_\mu^o = D^l(N_{x_o^*}^{-1}m)^h f(x)_{/x=x_o^*} \quad \text{mit} \quad \mu = h(n-p)+l \quad .$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $f(x)$ $N_{x_o}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $\{\alpha_o,\beta_o\}$; diese Eigenschaft müssen wir auch für die zu $f(x)$ gehörende verallgemeinerte Taylorreihe in (6.116) nachweisen, um Satz 6.9 anwenden zu können; es gelingt mit:

Hilfssatz 6.5: Unter der Voraussetzung (2.51) gilt:

(6.119) $$\left|D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q f(x,x_o^*) - D^r(N_{x_o^*}^{-1}m)^q f(x,x_o^*)\right| \leq C^{q(n-p)+r}(q(n-p)+r)!$$

für alle $x,x_0^* \in [c_{x_0^*}, d_{x_0^*}]$ (s.(6.94)); $q = 0,1,2,\ldots$, $r = 0,\ldots,n-1$; und mit einer Konstanten $\overline{C} =$ [1]) $= \overline{C}(c_{x_0^*}, d_{x_0^*}, f)$. Dabei wurde in (6.119) gesetzt:

$$f(x,x_0^*) := \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu^0 \cdot f_\mu(x,x_0^*) \quad . \tag{6.120}$$

(Beweis: S.110).

Nach Satz 6.7 4) erhalten wir für $N_{x_0^*}^{-1}m(f(x,x_0^*))$ eine Abschätzung der Art (6.99) und damit auch für $f(x,x_0^*)$ selber:

$$\left| D^r (N_{x_0^*}^{-1} m)^q f(x,x_0^*) \right| \leq \overline{\overline{C}}^{q(n-p)+r} (q(n-p)+r)! \tag{6.121}$$

für alle $x \in [c_{x_0^*}, d_{x_0^*}]$ und $q \geq 0$, $r = 0,\ldots,n-1$; [1])
mit einer Konstanten $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{C}}(c_{x_0^*}, d_{x_0^*}, f)$.

Wegen (6.119) und (6.121) ist die Taylorreihe $f(x,x_0^*)$ nach (6.107) $N_{x_0}^{-1}m$ - analytisch auf $\{\gamma_{x_0^*}, \delta_{x_0^*}\}$ (s.(6.94)). Also ist Satz 6.9 auf $f(x)$ und $f(x,x_0^*)$ im Intervall $\{\gamma_{x_0^*}, \delta_{x_0^*}\} \cap \{\alpha_0, \beta_0\}$ anwendbar: nach Satz 6.8 bzw. (6.113) wird $f(x)$ durch die zugehörige Taylorreihe $f(x,x_0^*)$ im Teilintervall (6.111):

$$\Delta(x_0^*) \subset \{\gamma_{x_0^*}, \delta_{x_0^*}\} \cap \{\alpha_0, \beta_0\} \qquad \text{(wegen } C^{-1} \leq R_{x_0^*}) \tag{6.122}$$

dargestellt, so daß auch Satz 6.9 1) erfüllt ist. Daraus folgt unmittelbar (6.116).-

Als nächstes zeigen wir, daß wir mit Hilfe des Identitätssatzes die auf S.33 angesprochene Entwicklung erhalten:

Hilfssatz 6.6: Unter der Voraussetzung (2.51) sind $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen stets $N_{x_0}^{-1}m$ - analytisch, und zwar auf demselben Intervall.

(Beweis: S.111).

Da für $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen $f(x)$ nach Satz 6.3 4) stets auch die zugehörigen Taylorreihen (6.40) $\tilde{N}^{-1}m$ - analytisch sind, so läßt sich im Intervall $[0,\tilde{R}) \cap [0,\beta_0\} \cap [0,1]$ (s.Satz 6.3 und 6.4) Hilfssatz 6.6 und anschließend Satz 6.9 anwenden: wir erhalten damit den globalen Entwicklungssatz für $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen: [2])

---

[1]) q=r=0 ausgenommen.

[2]) Wir formulieren den Entwicklungssatz auch für $f(x) \notin D_{\tilde{N}}$, wie im lokalen Falle bereits in der Anmerkung auf S.42 angedeutet: man braucht analog (6.108)-(6.113) die Entwicklung nur für $\tilde{N}^{-1}m(f)$ anzusetzen und nach $f(x)$ "aufzulösen".

Satz 6.11: Sei $f(x)$ eine $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktion auf $[0,\beta_0\}$. Dann gilt:

$$(6.123)\qquad f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot \tilde{f}_\mu(x,0) \quad ; \quad (\mu = h(n-p)+1)$$

mit dem Konvergenzradius der Reihe:

$$(6.124)\qquad \tilde{R}^{-1} = e\text{-}\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu|}$$

und den Koeffizienten: $\tilde{a}_l = U_{m-p+1+l}(f)$ $(l=0,..,p-1)$; [3]

$$(6.125)\qquad \tilde{a}_\mu = D^{i_{l-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)\Big|_{x=0} \quad ;(l = p,\dots,n-1;\ h \geq 0)$$

a) für alle $x \in [0,\beta_0\} \cap [0,\tilde{R}) \cap [0,1]$, falls die Bedingung (2.51) erfüllt ist; [1]

b) für alle $x \in [0,\beta_0\} \cap [0,1]$, falls in (6.50) $\tilde{C} < 1$ ist.

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall.

Anmerkung: Die Bedingung (2.51) ermöglicht erst für $N_{x_0}^{-1}m$ - analytische Funktionen einen "Basiswechsel", der ja für eine analytische Fortsetzung notwendig ist (s. Identitätssatz), der jedoch für $\tilde{N}^{-1}m$ - analytische Funktionen im allgemeinen nicht nachgewiesen werden kann.-

Schließlich untersuchen wir hinreichende Bedingungen für Entwicklungen im Falle a) des Satzes 6.11:

Satz 6.12: Die Koeffizientenfunktionen $f_i(z)$ und $g_i(z)$ in (2.41) und (2.42) seien holomorph in $|z| \leq 1$. Dann gilt (2.51). Ist zudem noch $f(z)$ holomorph in $|z| \leq a$ $(0 < a \leq 1)$, so ist $f(x)$ $\tilde{N}^{-1}m$ - analytisch auf $[0,a]$ [2].

(Beweis: S.112).

Satz 6.13: Die Lösungen $h(x)$ von $n(h) = 0$ sind $N_{x_0}^{-1}m$ - analytisch auf $[0,1]$ (d.h. (2.51) ist erfüllt) genau dann, wenn sie auf $[0,1]$ $\tilde{N}^{-1}m$ - analytisch sind.

---

[1]) (2.51) ist auch immer dann erfüllt, wenn aus $n(y)=0$ folgt: $m(y)=0$, d.h. wenn $m\tilde{N}^{-1}$ ein Differentialausdruck ist.

[2]) Es reicht aus, reell-analytische Funktionen zu fordern.

[3]) Diese Wahl von $\tilde{a}_l$ ergibt sich aus (6.2) und (6.4).

Beweis: Wir definieren entsprechend $\tilde{N}$ bzw. N_{x_o}:

$$(6.126)\qquad \tilde{N}_{x_o} y : \left\{ \begin{matrix} n(y) \\ U \cdot \begin{pmatrix} D^o y \\ \vdots \\ D^{n-1} y \end{pmatrix} (x_o) = 0 , \quad x_o \in [0,1] \end{matrix} \right\} ;$$

damit ist die (2.50) entsprechende Determinante für jedes x_o von Null verschieden. Nun gilt:

$$(6.127)\qquad \tilde{N}_{x_o}^{-1} m(f)(x) = \tilde{N}^{-1} m(f)(x) + \sum_{j=1}^{p} c_j (\tilde{N}^{-1} m(f)) \cdot h_j(x)$$

mit:

$$(6.128)\qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} D^o \tilde{N}^{-1} m(f) \\ \vdots \\ D^{n-1} \tilde{N}^{-1} m(f) \end{pmatrix} (x_o) \quad ,$$

wobei das Fundamentalsystem $\{h_j\}$ bereits geeignet gewählt wurde. Da (6.127) für beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktionen f(x) gilt, so folgt durch sukzessives Einsetzen von $\tilde{N}_{x_o}^{-1} m(h)$ in (6.127):

$$(6.129)\qquad (\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o} h(x) = (\tilde{N}^{-1} m)^{q_o} h(x) + \sum_{i=0}^{q_o-1} \sum_{j=1}^{p} d_{ij} \cdot (\tilde{N}^{-1} m)^{i} h_j(x)$$

mit Koeffizienten $d_{ij} = d_{ij}(h, x_o, q_o)$. Da nach Voraussetzung das Fundamentalsystem $\{h_j\}$ und h(x) $\tilde{N}^{-1} m$ - analytisch sind, so ist wegen (6.129) auch die Funktion $(\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o} h(x)$ $\tilde{N}^{-1} m$ - analytisch:

$$(6.130)\qquad \left| D^r (\tilde{N}^{-1} m)^{q-q_o} (\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o} h(x) \right| \le K^{q_o} \cdot \tilde{C}_{h1}^{q(n-p)+n-1} (q(n-p)+n-1)! \quad ,$$

wenn wir für ein beliebig, aber fest gewähltes q_o voraussetzen:

$$(6.131)\qquad \left| D^r (\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o} h(x) \right| \le K^{q_o} \cdot \tilde{C}_{h1}^{q_o(n-p)+n-1} (q_o(n-p)+n-1)!$$

mit Konstanten K und $\tilde{C}_{h1}$, $r = 0,\ldots,n-1$. Dabei muß $\tilde{C}_{h1}$ entsprechend groß gewählt werden. Dann gilt (6.130) auch für $q = q_o+1$:

$$(6.132)\qquad \left| D^r \tilde{N}^{-1} m (\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o} h(x) \right| \le K^{q_o} \tilde{C}_{h1}^{(q_o+1)(n-p)+n-1} ((q_o+1)(n-p)+n-1)!$$

Setzen wir nun $f(x) = (\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o} h(x)$ in (6.127) ein und berücksichtigen (6.132), so folgt:

$$(6.133)\qquad \left| D^r (\tilde{N}_{x_o}^{-1} m)^{q_o+1} h(x) \right| \le K^{q_o+1} \cdot \tilde{C}_{h1}^{(q_o+1)(n-p)+n-1} ((q_o+1)(n-p)+n-1)! ,$$

wenn wir die Konstante K geeignet wählen. Also gilt für alle $q \geq 0$ und $r = 0,\ldots,n-1$:

$$(6.134)\quad \left| D^r(\tilde{N}_{x_o}^{-1}m)^q h(x) \right| \leq \tilde{C}_{h2}^{q(n-p)+r} (q(n-p)+r)! \,; \qquad x,x_o \in [0,1]$$

mit einer von q,r,x,x_o unabhängigen Konstanten $\tilde{C}_{h2}$.

Da der Beweis sich auf beliebige Anfangsbedingungsmatrizen U verallgemeinern läßt, solange nur der Operator $(\tilde{N}_{x_o}^{-1}m)^q$ existiert, so ist (2.51) bewiesen. Die Umkehrung erfolgt aus einem zu (6.127),(6.128) analogen Ansatz: man ersetze $\tilde{N}$ durch N_{x_o}, und $\tilde{N}_{x_o}$ durch $\tilde{N}$.-

Dieser Beweis von Satz 6.13 eignet sich auch, um Hilfssatz 6.6 zu beweisen.

Es genügt also und scheint für praktische Anwendungen am geeignetsten, wenn man (2.51) für $x_o = 0$ nachweist.

Im folgenden § 7 werden wir nachweisen, daß die Entwicklungen (6.123) nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_o bzw. A_1 entwickelt werden können.

§ 7 Hinreichende Kriterien für die Entwickelbarkeit von Funktionen

Nach [10] S.32-33 gilt für die Greensche Funktion des Operators $M - \varrho^{n-p_N}$:

$$G(x,\xi,\varrho) = \frac{G_0(x,\xi,\varrho)}{W(\xi,\varrho)\cdot D(\varrho)} \tag{7.1}$$

wobei $D(\varrho)$ die charakteristische Determinante (2.25), $W(\xi,\varrho)$ die Wronskideterminante eines Fundamentalsystems $\{\overline{y}_1(x,\varrho),\ldots,\overline{y}_n(x,\varrho)\}$ von $m(y) = \varrho^{n-p_n(y)}$ ist:

$$W(\xi,\varrho) := \begin{vmatrix} \overline{y}_1(\xi,\varrho) & \ldots\ldots & \overline{y}_n(\xi,\varrho) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \ldots\ldots & \overline{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho) \end{vmatrix} \tag{7.2}$$

Weiterhin ist:

$$G_0(x,\xi,\varrho) := \begin{vmatrix} g(x,\xi,\varrho) & \overline{y}_1(x,\varrho) & \ldots\ldots & \overline{y}_n(x,\varrho) \\ U_1(g) & U_1(\overline{y}_1) & \ldots\ldots & U_1(\overline{y}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_n(g) & U_n(\overline{y}_1) & \ldots\ldots & U_n(\overline{y}_n) \end{vmatrix} \tag{7.3}$$

mit

$$g(x,\xi,\varrho) := \begin{cases} +\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\cdot\overline{y}_j(x,\varrho)\cdot W_j(\xi,\varrho) & \xi \le x \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\cdot\overline{y}_j(x,\varrho)\cdot W_j(\xi,\varrho) & \xi \ge x \end{cases} \quad \text{für} \tag{7.4}$$

und $W_j(\xi,\varrho)$ ist das algebraische Komplement des Elementes $\overline{y}_j^{(n-1)}(\xi,\varrho)$ in der Wronskideterminante (7.2). Aus (7.3) folgt:

$$G_0(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\cdot W_j(\xi,\varrho)\cdot\widetilde{M}_j(x,\varrho) \tag{7.5}$$
$$\xi \le x$$

mit :

$$\widetilde{M}_j(x,\varrho) := \tag{7.6}$$ [1]

[1] Für $x \le \xi$ wird im Beweis von Satz 5.1 eine andere Beweismethode gewählt (s.S.81-84).

$$= \begin{vmatrix} \bar{y}_j(x,\varrho) & \bar{y}_1(x,\varrho) & \dots & \bar{y}_{j-1}(x,\varrho) & 0 & \bar{y}_{j+1}(x,\varrho) & \dots & \bar{y}_n(x,\varrho) \\ 0 & U_1(\bar{y}_1) & & & & & & U_1(\bar{y}_n) \\ \vdots & \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & U_m(\bar{y}_1) & & & & & & U_m(\bar{y}_n) \\ U_{m+1}(\bar{y}_j) & & \dots & U_{m+1}(\bar{y}_{j-1}) & 0 & U_{m+1}(\bar{y}_{j+1}) & \dots & U_{m+1}(\bar{y}_n) \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_n(\bar{y}_j) & & \dots & U_n(\bar{y}_{j-1}) & 0 & U_n(\bar{y}_{j+1}) & \dots & U_n(\bar{y}_n) \end{vmatrix}$$

Wir definieren:

$$M_j(x,\xi,\varrho) := \frac{\widetilde{M}_j(x,\varrho)}{W(\xi,\varrho)\cdot D(\varrho)} \tag{7.7}$$

und erhalten aus (7.1),(7.5):

$$G(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} W_j(\xi,\varrho)\cdot M_j(x,\xi,\varrho) \tag{7.8}$$
$$\xi \leq x$$

Seien $D^{\circ}_{ij}(\varrho)$ die Minoren der ersten Zeile in der Determinante (7.6):

$$D^{\circ}_{ij}(\varrho) := \qquad \text{(für } i,j = 1,\dots,n) \tag{7.9}$$

$$= \begin{vmatrix} U_1(\bar{y}_1) & \dots & U_1(\bar{y}_{i-1}) & U_1(\bar{y}_{i+1}) & \dots & U_1(\bar{y}_n) & U_1(\bar{y}_j) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_m(\bar{y}_1) & \dots & U_m(\bar{y}_{i-1}) & U_m(\bar{y}_{i+1}) & \dots & U_m(\bar{y}_n) & U_m(\bar{y}_j) \\ U_{m+1}(\bar{y}_1) & \dots & U_{m+1}(\bar{y}_{i-1}) & U_{m+1}(\bar{y}_{i+1}) & \dots & U_{m+1}(\bar{y}_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_n(\bar{y}_1) & \dots & U_n(\bar{y}_{i-1}) & U_n(\bar{y}_{i+1}) & \dots & U_n(\bar{y}_n) & 0 \end{vmatrix} .$$

Dann läßt sich $G(x,\xi,\varrho)$ darstellen in der Form:

$$G(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=1}^{n} \frac{W_j(\xi,\varrho)}{W(\xi,\varrho)} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot \bar{y}_i(x,\varrho)\cdot \frac{D^{\circ}_{ij}(\varrho)}{D(\varrho)} \tag{7.10}$$
$$\xi \leq x$$

Wir unterscheiden nun in der Doppelsumme in (7.10) vier Summanden:

$$G_1(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=p+1}^{n} \sum_{i=p+1}^{n} \dots \; ; \; G_2(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=p+1}^{n} \sum_{i=1}^{p} \dots \tag{7.11}$$

(7.12) $$G_3(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=p+1}^{n} \cdots \quad ; \quad G_4(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} \cdots$$

Dann folgt aus Satz 5.2 unmittelbar:

Hilfssatz 7.1: Sei $f(x) \in C^n[0,d]$ $(0 < d \leq 1)$. Dann gilt für die Greensche Funktion des Rand-Eigenwertproblems A_0:

(7.13) $$\lim_{j\to\infty} \max_{0\leq x\leq d} \left| \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \left(\int_0^x G_i(x,\xi,\varrho) \cdot m(f)\, d\xi \right) \right| = 0$$

für $i = 2,3,4$.

(Beweis: S.114).

Wir beachten nun stets $\xi \leq x$ und definieren:

(7.14) $$N_j(x,\xi,\varrho) := \frac{1}{W(\xi,\varrho)} \cdot \sum_{i=p+1}^{n} (-1)^{i+j} \bar{y}_i(x,\varrho) \cdot \frac{D^0_{ij}(\varrho)}{D(\varrho)}$$

für $j = 1,\ldots,n$

so daß aus (7.11),(7.12) und (7.14) folgt:

(7.15) $$G_1(x,\xi,\varrho) + G_3(x,\xi,\varrho) = \sum_{j=1}^{n} W_j(\xi,\varrho) \cdot N_j(x,\xi,\varrho) \quad .$$

Wegen (5.13), Hilfssatz 5.2 und Hilfssatz 7.1 ist im weiteren das Integral

(7.16) $$\int_0^x G_1(x,\xi,\varrho) \cdot m(f) \cdot d\xi$$

von Interesse. Im folgenden stellt sich jedoch heraus, daß es zweckmäßiger ist, den Summanden $G_3(x,\xi,\varrho)$ hinzuzunehmen:

(7.17) $$\int_0^x (G_1 + G_3)(x,\xi,\varrho) \cdot m(f) \cdot d\xi =$$

$$= \int_0^x \sum_{j=1}^{n} W_j(\xi,\varrho) \cdot N_j(x,\xi,\varrho) \cdot m(f)\, d\xi =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} N_j^0(x,\varrho) \int_0^x W_j(\xi,\varrho) \cdot m(f) \cdot d\xi$$

mit:

(7.18) $$N_j^0(x,\varrho) := \frac{1}{W_0(\varrho)} \cdot \sum_{i=p+1}^{n} (-1)^{i+j} \bar{y}_i(x,\varrho) \cdot \frac{D^0_{ij}(\varrho)}{D(\varrho)}$$

und:

(7.19) $$W_0(\varrho) := W(\xi,\varrho) \quad \text{für} \quad f_1(\xi) \equiv 0.$$

Die Umformung (7.17) ist gültig unter der Voraussetzung, daß $f_1(x) \neq 0$ (dies ist o.B.d.A. möglich: s. (2.41)), denn aus (7.2) folgt:

$$W'(\xi,\varrho) = - f_1(\xi) \cdot W(\xi,\varrho)$$

und damit die ξ - Unabhängigkeit von $W(\xi,\varrho)$ in (7.19).

Hilfssatz 7.2: In den Sektoren $S_{2\varkappa}$ bzw. $S_{2\varkappa+1}$ gelten für $|\varrho| > \varrho_0$ die Abschätzungen:

$$(7.20) \qquad |N_j^0(x,\varrho)| \leq C_5 \cdot |\varrho|^{-\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}} \cdot \left| e^{\varrho \omega_{j-p} x} \right|$$

für $j = p+1,\ldots,n. \qquad 0 \leq \xi \leq x \leq 1.$

(Beweis: S.114).

Weiterhin untersuchen wir das Integral (7.17); wegen Hilfssatz 7.1 genügt es, das Integral (7.17) an der unteren Grenze und das Integral (7.16) an der oberen Grenze zu untersuchen. Dazu gelte für f(x) die Entwicklung (6.123):

$$(7.21) \qquad f(x) = \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot \tilde{f}_\mu(x,0) \qquad \text{für} \quad x \in [0,\tilde{R}) \cap [0,\beta_0),$$

wobei die Reihe absolut und gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall konvergiert. Aus (7.21) und der Eigenschaft (6.15) der $\tilde{N}^{-1}m$ - Basis folgt:

$$(7.22) \qquad m(f) = \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu m(\tilde{f}_\mu) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l} n(\tilde{f}_{h(n-p)+l}).$$

Da eine Vertauschung von Integration und Summation wegen der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz erlaubt ist, folgt aus (7.22) durch Einsetzen in das Integral von (7.17) bzw. (7.16):

$$(7.23) \qquad \int_0^x W_j(\xi,\varrho)\, m(f)\, d\xi = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l} \cdot \int_0^x W_j(\xi,\varrho)\, n(\tilde{f}_{h(n-p)+l}(\xi))\, d\xi ,$$

wenn wir (7.16) analog (7.17) umformen:

$$(7.24) \qquad \int_0^x G_1(x,\xi,\varrho)\, m(f)\, d\xi = \sum_{j=p+1}^{n} N_j^0(x,\varrho) \int_0^x W_j(\xi,\varrho)\, m(f)\, d\xi$$

Das Integral auf der rechten Seite von (7.23) wird nun mit Hilfe von partiellen Integrationen umgeformt und abgeschätzt:

Hilfssatz 7.3: Für hinreichend großes $|\zeta| > \zeta_o$ im Sektor $S_{2\nu}$ bzw. $S_{2\nu+1}$ und $x > 0$ gilt: das Integral

(7.25)
$$\int_0^x W_j(\xi,\zeta)\, n(\tilde{f}_{h(n-p)+l}(\xi))\, d\xi =$$
$$= E_j(\xi,h(n-p)+l)\Big|_0^x = H_j(x,h(n-p)+l)$$

für $j=1,\ldots,n$; $h=0,1,2,\ldots$; $l=p,\ldots,n-1$

hat die Eigenschaften:

(7.26)
$$E_j(0,h(n-p)+l) =$$
$$= \frac{1}{\zeta^{(h+1)(n-p)}} \left(B_j(0,l) - \zeta^{n-p} D_j(0,l) \right)$$

für alle j,h,l;

(7.27)
$$E_j(x,h(n-p)+l) = \begin{cases} O\left(\zeta^{-(n-p)+\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}} e^{-\zeta\omega_{j-p}x}\right) \\ \quad \text{für } h=0,\ldots,h_o-1 \\ O\left(\zeta^{-(h+1)(n-p)+\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}} \cdot e^{-\zeta\omega_{j-p}x} \cdot S_{h(n-p)}(|\zeta x|)\right) \\ \quad \text{für } h=h_o,h_o+1,h_o+2,\ldots \end{cases}$$

und für alle $j=p+1,\ldots,n$; $l=p,\ldots,n-1$, mit:

$$h_o := \left[\frac{n-1}{n-p}\right] + 1 \quad .$$

(7.28)
$$H_j(x,h(n-p)+l) = O\left(\zeta^{-(h+1)(n-p)+\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}-p} \cdot e^{-\zeta\omega_{j-p}x} T_{h(n-p)+1}(|\zeta x|)\right)$$

für alle $j=p+1,\ldots,n$; $h=0,1,2,\ldots$; $l=p,\ldots,n-1$.

In (7.27) und (7.28) gilt:

(7.29)
$$S_r(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^r}{r!}$$

(7.30) $$T_r(x) := \frac{x^r}{r!} + \frac{x^{r+1}}{(r+1)!} + \dots$$

In (7.26) gilt:

(7.31) $$B_j(x,h(n-p)+1) := \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}^{(i)}_{h(n-p)+1}(x,0) \sum_{q=0}^{n-1-i} (-1)^{q+1} (f_{n-1-i-q}(x)\cdot W_j(x,\varrho))^{(q)}$$

(7.32) $$D_j(x,h(n-p)+1) := \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{f}^{(i)}_{h(n-p)+1}(x,0) \sum_{q=0}^{p-1-i} (-1)^{q+1} (g_{p-1-i-q}(x)\cdot W_j(x,\varrho))^{(q)}$$

(Beweis: S.115).

Wir setzen nun (7.25) in (7.23) und dies wiederum in die rechte Seite von (7.17) ein:

(7.33) $$\sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \int_o^x W_j(\xi,\varrho)\cdot m(f)\cdot d\xi = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho)\cdot \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+1}\cdot E_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_o^x .$$

Wir untersuchen zunächst das Verhalten an der unteren Grenze:

Hilfssatz 7.4: Die Funktion

(7.34) $$\varphi(x) := \sum_{l=p}^{n-1} b_l\cdot \tilde{f}_l(x,0)$$

mit beliebigen Koeffizienten b_l möge die Randbedingungen (2.6) in x = 0 erfüllen, d.h.:

(7.35) $$U_j(\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1,\dots,m .$$

Dann gilt:

(7.36) $$\sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho)\cdot \sum_{l=p}^{n-1} b_l\cdot E_j(0,h(n-p)+1) = 0$$

für h = 0,1,2,...

(Beweis: S.118).

Setzen wir also $b_l := \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+1}$, so verschwindet in (7.33) der Term an der unteren Grenze nach Hilfssatz 7.4. Wie wirkt sich nun die Forderung (7.35) auf das Verhalten von f(x) aus ?

Um diese Frage zu beantworten, definieren wir Funktionen:

$$(7.37)\qquad \varphi_h(x) := \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l} \cdot \tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0), \quad (h \geq 0) .$$

Wegen der Eigenschaft (6.18) folgt aus (7.37):

$$(7.38)\qquad \varphi(x) := (\tilde{N}^{-1}m)^h \varphi_h(x) = \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l} \cdot \tilde{f}_l(x,0) .$$

Die Bedingung (7.35) lautet damit:

$$(7.39)\qquad U_j((\tilde{N}^{-1}m)^h \varphi_h) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1,\ldots,m \; ; \; h \geq 0 .$$

Andererseits folgt aus der Entwicklung (7.21):

$$(7.40)\qquad (\tilde{N}^{-1}m)^h f(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(h+q)(n-p)+l} \cdot \tilde{f}_{q(n-p)+l}(x,0),$$

und da nach (6.16) die Anfangsbedingungen

$$(7.41)\qquad \tilde{f}^{(r)}_{q(n-p)+l}(x,0)\big/_{x=0} = 0 \quad \text{für} \quad r = 0,\ldots,n-1; \; l = p,\ldots,n-1; \; q = 1,2,3,\ldots$$

gelten, so folgt:

$$(7.42)\qquad U_j((\tilde{N}^{-1}m)^h f) = U_j\Big(\sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{h(n-p)+l} \cdot \tilde{f}_l\Big) \; , \; (j=1,\ldots,m),$$

so daß wegen (7.38),(7.39) die Bedingung (7.35) äquivalent ist mit

$$(7.43)\qquad U_j((\tilde{N}^{-1}m)^h f) = 0 \quad \text{für} \quad h = 1,2,3,\ldots \quad (j=1,\ldots,m).$$

Diese Bedingung an f(x) wurde bereits in Satz 4.4 3) als notwendige Bedingung für die Entwickelbarkeit von f(x) nachgewiesen.

Schließlich müssen wir das Integral in (7.17) noch an der oberen Grenze abschätzen; dazu schätzen wir

$$(7.44)\qquad \tilde{I}_h(x,\varrho) := \int_0^x G_1(x,\xi,\varrho)\; n(\varphi_h(\xi))\; d\xi$$

ab. Es gilt nämlich unter Berücksichtigung von (7.37) und (7.2_2):

$$(7.45)\qquad \tilde{I}(x,\varrho) := \int_0^x G_1(x,\xi,\varrho)\; m(f)\; d\xi = \sum_{h=0}^{\infty} \tilde{I}_h(x,\varrho) \quad ;$$

Hilfssatz 7.5: Seien d, d_1 wie in Hilfssatz 5.2 gewählt:

(7.46) $$0 < d < d_1 < 1 \quad .$$

δ sei beliebige Zahl mit:

(7.47) $$\frac{d}{d_1} < \delta < 1 \quad .$$

Weiterhin sei:

(7.48) $$U_j((\tilde{N}^{-1}m)^h \varphi_h) = U_j\Big(\sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} \tilde{f}_l\Big) = 0$$

für $j = 1,\ldots,m$ mit:

(7.49) $$\varphi_h(x) := \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} \cdot \tilde{f}_{h(n-p)+l}(x,0)$$

für $h = 0,1,2,\ldots$ Auf $[0,c]$ $(0 < c \leq 1)$ konvergiere die Reihe $\sum_{h=0}^{\infty} \varphi_h(x)$ absolut und gleichmäßig. Dann existiert eine Konstante $C_8 = C_8(\delta) > 0$, so daß im Sektor $S_{2\varkappa}$ bzw. $S_{2\varkappa+1}$ für $|\varrho| > \varrho_0$ und für $x \in [\Delta, c]$ $(0 < \Delta \leq c)$ die folgende Abschätzung gilt:

(7.50) $$|\tilde{I}(x,\varrho)| = \Big|\int_0^x G_1(x,\xi,\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} n(\varphi_h(\xi))\, d\xi\Big| \leq$$

$$\leq \frac{C_8}{|\varrho|} \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} |b_{h(n-p)+l}| \frac{\left(\frac{x}{\delta}\right)^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \quad .$$

(Beweis: S.124).

Im Beweis wird (7.45),(7.44) mittels (7.49) und Hilfssatz 7.3 abgeschätzt.-

Damit haben wir die Voraussetzungen geschaffen, um den entscheidenden Entwicklungssatz zu beweisen:

Satz 7.1: Sei: 1) $f(x)$ $\tilde{N}^{-1}m$ - analytisch auf $[0,a\}$ $(0 < a < 1)$;

2) $U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0$ für $q = 0,1,2,\ldots$; $j = 1,\ldots,m$;

a) Dann läßt sich $f(x)$ auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[0,\tilde{R}) \cap [0,a\}$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen $y_k(x)$ des Rand-Eigenwertproblems A_1 entwickeln:

(7.51) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot y_k(x) \qquad \text{für} \qquad x \in [0,\tilde{R}) \cap [0,a] \quad .$$

Diese Entwicklung gilt auch für das Rand-Eigenwertproblem A_o, falls in der Abschätzung (6.41) $\tilde{C} < 1$ und damit $\tilde{R} > 1$ gilt.
Der Konvergenzradius $\tilde{R}$ kann bestimmt werden durch:

(7.52) $$\tilde{R}^{-1} := e.\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|\tilde{a}^1_\mu|} \quad ;$$

mit den Koeffizienten:

(7.53) $$\tilde{a}^1_\mu := D^{r_i}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)_{/x=0} \qquad \text{für} \qquad \mu = h(n-m)+i$$

$h = 0,1,2,\ldots$; $i = 1,\ldots,n-m$; also $\mu = 1,2,3,\ldots$;
dabei gilt:

(7.54) $$r_1,\ldots,r_{n-m} \in \{0,\ldots,n-1\} \setminus \{k_1,\ldots,k_m\} \quad .$$

b) Zusätzlich zu den Voraussetzungen 1) und 2) sei:

3) $f(x)\ \tilde{N}^{-1}m$ - analytisch auf $[0,1]$;

4) $U_j(f) = 0$ für $j = m+1,\ldots,n$;

5) $\tilde{R} > 1$.

Dann konvergiert die Fourierentwicklung (7.51) von $f(x)$ nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_1 gleichmäßig in $[0,1]$ und strebt gegen $f(x)$:

(7.55) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot y_k(x) \qquad \text{für} \qquad x \in [0,1] \quad .$$

Wiederum gilt diese Entwicklung auch für das Rand-Eigenwertproblem A_o, falls in der Abschätzung (6.41) $\tilde{C} < 1$ und damit $\tilde{R} > 1$ gilt.

Beweis:
a) Nach Voraussetzung 1) ist Satz 6.11 (S.45) anwendbar, d.h. es existiert eine Entwicklung (7.21) mit $\beta_o := a$; aus (7.50) folgt:

(7.56) $$|\tilde{I}(x,\varrho)| \le \frac{C_8}{|\varrho|} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} \left|\tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l}\right| \frac{\left(\frac{x}{\delta}\right)^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \quad ,$$

denn wegen der Voraussetzung 2) ist über (7.37)-(7.43) die Bedingung (7.48) erfüllt mit:

(7.57) $$b_{h(n-p)+l} := \tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l} \qquad \text{für alle } h,l \quad .$$

Somit folgt aus (7.56) mit einer Konstanten $C_9 > 0$:

$$(7.58)\quad |\tilde{I}(x,\varrho)| \le \frac{C_8}{|\varrho|}\cdot\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{l=p}^{n-1}|\tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l}|\cdot\frac{(\frac{x}{\delta})^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} + \frac{C_9}{|\varrho|} \le$$

$$\le \frac{C_8}{|\varrho|}\cdot\sum_{h=1}^{\infty}\sum_{l=p}^{n-1}|\tilde{a}_{(h+1)(n-p)+l}|\cdot\frac{(\frac{x}{\delta})^{(h-1)(n-p)+l-p}}{((h-1)(n-p)+l-p)!} + \frac{C_9}{|\varrho|}$$

für alle $0<\Delta\le x \le d < 1$, denn für diese x gilt mit (7.46),(7.47):

$$(7.59)\quad \frac{x}{\delta} < 1 .$$

Wir definieren:

$$(7.60)\quad \tilde{d}_\nu := \tilde{a}_{\nu+2n-p} \qquad (\nu = 0,1,2,\ldots)$$

und erhalten damit aus (7.58):

$$(7.61)\quad |\tilde{I}(x,\varrho)| \le \frac{C_8}{|\varrho|}\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{|\tilde{d}_\nu|}{\nu!}\cdot(\frac{x}{\delta})^\nu + \frac{C_9}{|\varrho|} \quad \text{für } x\in[\Delta,d] .$$

Da wegen (7.60) für den Konvergenzradius (6.124) der Reihe (6.123)

$$(7.62)\quad \tilde{R}^{-1} := e\cdot\overline{\lim_{\mu\to\infty}}\frac{1}{\mu}\sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu|} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}}\sqrt[\mu]{\frac{|\tilde{a}_\mu|}{\mu!}} = \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\sqrt[\nu]{\frac{|\tilde{d}_\nu|}{\nu!}}$$

gilt (die zweite Gleichung folgt aus der Stirlingschen Formel), so existiert sicherlich eine Konstante $C_{10} > 0$:

$$(7.63)\quad \sqrt[\nu]{\frac{|\tilde{d}_\nu|}{\nu!}} \le \tilde{R}^{-1}\cdot\sqrt[\nu]{C_{10}} \quad \text{für alle } \nu \ge \nu_0 .$$

Wir wählen jetzt:

$$(7.64)\quad 0 < d < d_1 < \min\{a,\tilde{R}\} \le 1 .$$

Damit folgt aus (7.63):

$$(7.65)\quad |\tilde{d}_\nu| \le \frac{C_{10}}{\tilde{R}^\nu}\cdot\nu! \le \frac{C_{10}}{d_1^\nu}\cdot\nu! .$$

Setzen wir (7.65) in (7.61) ein und beachten (7.59),(7.64), so ergibt sich:

$$(7.66)\quad |\tilde{I}(x,\varrho)| \le \frac{C_8\cdot C_{10}}{|\varrho|}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\frac{d}{d_1\cdot\delta})^\nu + \frac{C_9}{|\varrho|} \quad \text{für } x\in[\Delta,d] .$$

Wegen (7.47) existiert eine Konstante C_{11}, so daß gilt:

$$(7.67) \qquad |\tilde{I}(x,\varrho)| \leq \frac{C_{11}}{|\varrho|} \quad \text{für} \quad x \in [\Delta,d] \quad \text{und} \quad |\varrho| > \varrho_0 .$$

Beachten wir jetzt noch die Identität in (7.50) und (7.49), (7.22), so folgt aus (7.67):

$$(7.68) \qquad \left| \int_0^x G_1(x,\xi,\varrho)\, m(f)\, d\xi \right| \leq \frac{C_{11}}{|\varrho|} \quad \text{für} \quad x \in [\Delta,d] \;, |\varrho| > \varrho_0 .$$

Über die Hilfssätze 5.2 und 7.1 und wegen (8.300) können wir schließen:

$$(7.69) \qquad \lim_{j\to\infty} \max_{\Delta \leq x \leq d} \left| f(x) - s_j(x) \right| = 0 \;.$$

Daß die Aussage (7.69) auch für $\Delta = 0$ richtig ist, folgt unmittelbar aus Satz 4.4 1) und der Stetigkeit von f(x).

Konvergenzart und Konvergenzradius der Entwicklung (7.51) ergeben sich aus Satz 6.11.

Die Randausdrücke

$$(7.70) \qquad U_j((\tilde{N}^{-1}m)^h f) \quad \text{und} \quad D^{i_r-p+1}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)\Big/_{x=0}$$

$$(j=m-p+1,\ldots,m) \qquad (r=p,\ldots,n-1)$$

bzw.

$$(7.71) \qquad U_j((\tilde{N}^{-1}m)^h f) \quad \text{und} \quad D^{r_i}(\tilde{N}^{-1}m)^h f(x)\Big/_{x=0}$$

$$(j=1,\ldots,m) \qquad (i=1,\ldots,n-m)$$

bilden je ein System von n linear unabhängigen Randausdrücken in x = 0 für jedes h = 0,1,2,... . Also läßt sich jedes $\tilde{a}_\mu^1$ durch eine von h unabhängige Linearkombination der sich aus (7.70) ergebenden zugehörigen $\tilde{a}_\mu$ (s.(6.123)) darstellen (und umgekehrt). Deshalb gilt

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu^1|} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu|} \;;$$

und daraus folgt (7.52) mit (7.53),(7.54) wegen (6.124).

b) Wegen der Voraussetzung 4) ist zunächst die letzte Aussage des Satzes 5.2 (s.S.24) erfüllt; außerdem ist die Entwicklung (6.123) richtig für alle $x \in [0,1]$ wegen der Voraussetzungen 3)

und 5). Weiterhin ist die Abschätzung (7.68) richtig für alle $x \in [0,d]$ mit $d < 1$. Wegen der Stetigkeit der linken Seite von (7.68) in x auf $[0,1]$ folgt analog zum Beweis von Teil a):

$$\lim_{j\to\infty} \max_{0 \le x \le 1} \left| f(x) - s_j(x) \right| = 0 \tag{7.72}$$

und daraus die Behauptung (7.55). Damit ist Satz 7.1 vollständig bewiesen.-

Im Falle N = I zeigt Kromow in [12] S.328 f., daß unter den Voraussetzungen des Entwicklungssatzes 7.1 im allgemeinen im Intervall $(\tilde{R},1)$ keine konvergenten Fourierentwicklungen existieren. Er beweist dies anhand eines speziellen Rand-Eigenwertproblems, für das es zu jedem $\delta > 0$ eine Funktion $f_\delta(x)$ gibt, die zwar die Voraussetzungen des Satzes 7.1 a) erfüllt, für die jedoch im Intervall $(\tilde{R},\tilde{R}+\delta)$ Punkte mit divergierender Fourierentwicklung existieren!

Zusammenfassung der notwendigen und hinreichenden Kriterien:

Satz 7.2: Es sei das Rand-Eigenwertproblem A_1 zugrundegelegt. $\tilde{R}$ sei definiert durch (6.124),(6.125). Dann sind die folgenden Aussagen 1), 2), 3) äquivalent:

1) (i) f(x) ist $\tilde{N}^{-1}m$-analytisch auf $[0,\tilde{R})\cap[0,1]$;
   (ii) $U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0$ für q=0,1,..; j=1,..,m;
   (iii) $U_j(f) = 0$ für j=m+1,..,n, falls $\tilde{R} > 1$;

2) (i) f(x) läßt sich auf $[0,\tilde{R})\cap[0,1]$ in eine $\tilde{N}^{-1}m$-Taylorreihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot \tilde{f}_\mu(x,0) \quad \text{für} \quad x \in [0,\tilde{R})\cap[0,1] ; \tag{7.73}$$

   (ii) $U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0$ für q=0,1,..; j=1,..,m;
   (iii) $U_j(f) = 0$ für j=m+1,..,n, falls $\tilde{R} > 1$;

3) f(x) läßt sich auf $[0,\tilde{R})\cap[0,1]$ in eine auf jedem abgeschlossenen Teilintervall gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen entwickeln.

(Beweis: S.126).

Damit haben wir nachgewiesen, daß die beiden Bedingungen (1.5), (1.6) die gleichmäßig konvergenten Fourierentwicklungen nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_1 charakterisieren.

Über Satz 7.2 hinaus ist die aus Satz 4.4 folgende notwendige Bedingung interessant:

Satz 7.3: Läßt sich $f(x)$ auf $[0,x_1]$ $(0 < x_1 \leq 1)$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_0 entwickeln, so gilt:
(i) $f(x)$ ist auf $[0,x_1)$ $\tilde{N}^{-1}m$ - analytisch (unabhängig von $\tilde{R}$, definiert durch (6.124),(6.125));
(ii) für $\tilde{R}$ gilt die Abschätzung:

$$\tilde{R} \geq x_1 \cdot \cos\left(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi}\right) \quad . \tag{7.74}$$

(Beweis: S.126).

Beschränken wir uns auf Rand-Eigenwertprobleme A_0 mit holomorphen Koeffizientenfunktionen, so gelten entsprechende Sätze für holomorphe bzw. reell-analytische Funktionen $f(x)$; dazu benötigen wir noch:

Hilfssatz 7.6: Die Koeffizientenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_0 seien in $|z| \leq 1$ holomorph [1]). Ist $f(z)$ holomorph in $|z| \leq a$, $0<a \leq 1$, so läßt sich auf $[0,a] \cap [0,1]$ $f(x)$ nicht nur in eine gewöhnliche Taylorreihe um $x = 0$, sondern auch in eine $\tilde{N}^{-1}m$-Taylorreihe entwickeln:

$$\tilde{R} > a \, . \tag{7.75}$$

(Beweis: S.127).

Jetzt sind wir in der Lage, die Sätze 7.2, 7.3 für holomorphe Funktionen zu formulieren:

Satz 7.4: Es sei das Rand-Eigenwertproblem A_0 mit in $|z| \leq 1$ holomorphen [1]) Koeffizientenfunktionen zugrundegelegt. Sei:

$$R^{-1} := e \cdot \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|b_\mu|} \; ; \quad b_\mu := f^{(\mu)}(x)_{/x=0} \, . \tag{7.76}$$

Dann sind die folgenden Aussagen 1), 2), 3) äquivalent:

1) (i) $f(x)$ ist reell-analytisch auf $[0,R) \cap [0,1]$;
(ii) $U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0$ für $q=0,1,..$; $j=1,..,m$;
(iii) $U_j(f) = 0$ für $j=m+1,..,n$, falls $R > 1$;

2) (i) $f(x)$ läßt sich auf $[0,R) \cap [0,1]$ in eine gewöhnliche Taylorreihe entwickeln:

[1]) Wir verzichten hier auf größte Allgemeinheit.

(7.77) $$f(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} b_\mu \frac{x^\mu}{\mu!} \quad \text{für} \quad x \in [0,R) \cap [0,1] \; ;$$

(ii) $U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0$ für $q=0,1,..;\ j=1,..,m;$

(iii) $U_j(f) = 0$ für $j=m+1,..,n$, falls $R > 1$;

3) $f(x)$ läßt sich auf $[0,R) \cap [0,1]$ in eine auf jedem abgeschlossenen Teilintervall gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen entwickeln.

(Beweis: S.133).

Satz 7.5: Läßt sich $f(x)$ auf $[0,x_1]$ $(0 < x_1 \leq 1)$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_o mit in $|z| \leq 1$ holomorphen Koeffizientenfunktionen entwickeln, so gilt:

(i) $f(x)$ ist auf $[0,x_1)$ reell-analytisch (unabhängig von R, definiert durch (7.76));

(ii) für R gilt die Abschätzung:

(7.78) $$R \geq x_1 \cdot \cos(\frac{n-m}{n-p}\pi) \quad .$$

(Beweis: S.133).

Eine direkte Konsequenz des Satzes 7.4 ist

Satz 7.6: Die Koeffizientenfunktionen des Rand-Eigenwertproblems A_o seien in $|z| \leq 1$ holomorph. $f(z)$ erfülle die Voraussetzungen:

(i) $f(z)$ sei in $|z| \leq 1$ holomorph;

(ii) $U_j((\tilde{N}^{-1}m)^q f) = 0$ für $q=0,1,..;\ j=1,..,m;$

(iii) $U_j(f) = 0$ für $j=m+1,..,n$.

Dann läßt sich $f(x)$ auf $[0,1]$ in eine gleichmäßig konvergente Fourierreihe nach den Eigenfunktionen $y_k(x)$ des Rand-Eigenwertproblems A_o entwickeln:

(7.79) $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot y_k(x) \quad \text{für} \quad x \in [0,1] \quad .$$

Nach Satz 7.4 1), 3) sind zwar die Bedingungen (ii),(iii) auch notwendig für die Entwicklung (7.79), aber nach den Sätzen 4.1 und 7.5 läßt sich aus der Entwicklung (7.79) lediglich die Holomorphie von $f(z)$ im Innern des Polygons mit den Eckpunkten (4.2) bzw. (4.3), d.h. die Konvergenz der gewöhnlichen Taylorreihe um $x=0$ in $|z| < \cos(\frac{n-m}{n-p}\pi)$ folgern; entsprechend folgt im allgemeinen Falle des Satzes 7.3 aus der Fourierreihenentwicklung auf $[0,1]$ die Konvergenz der $\tilde{N}^{-1}m$ - Taylorreihe nur in $[0,\cos(\frac{n-m}{n-p}\pi))$.-

§ 8 Weitere Beweise und Hilfssätze

Beweis von Satz 2.1: Es sei j diejenige Permutation der Zahlen 1,...,n, die die Randausdrücke (2.6)-(2.9) auf die Form (2.19)-(2.21) bringen:

$$(8.1)\qquad \bar{U}_{io}(y) = a_i \cdot y^{(\bar{k}_i)}(0) + \sum_{l=0}^{\bar{k}_i-1} \bar{\alpha}_{il} \cdot y^{(l)}(0);\ (i=1,\dots,n)$$

$$(8.2)\qquad \bar{U}_{i1}(y) = b_i \cdot y^{(\bar{k}_i)}(1) + \sum_{l=0}^{\bar{k}_i-1} \bar{\beta}_{il} \cdot y^{(l)}(1);\ (i=1,\dots,n)$$

mit:

$$(8.3)\qquad \bar{k}_i := k_{j_i} \quad (i=1,\dots,n)$$

$$(8.4)\qquad a_i := \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} j_i = 1,\dots,m \\ j_i = m+1,\dots,n \end{matrix} \right\}$$

$$(8.5)\qquad b_i := \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} j_i = m+1,\dots,n \\ j_i = 1,\dots,m \end{matrix} \right\}$$

$$(8.6)\qquad \bar{\alpha}_{il} := \left\{ \begin{matrix} \alpha_{j_i l} \text{ für } j_i=1,..,m \\ 0 \qquad\quad j_i=m+1,..,n \end{matrix} \right\};\ \bar{\beta}_{il} := \left\{ \begin{matrix} \beta_{j_i l} \text{ für } j_i=m+1,..,n \\ 0 \qquad\quad j_i=1,..,m \end{matrix} \right\}$$

$$(8.7)\qquad n-1 \geq \bar{k}_1 \geq \dots \geq \bar{k}_n \geq 0\ ;\ \bar{k}_{i-2} > \bar{k}_i\ ;\ |a_i| + |b_i| > 0.$$

$$(8.8)\qquad \bar{U}_i(y) := \bar{U}_{io}(y) + \bar{U}_{i1}(y) = 0\ ,\quad i = 1,\dots,n\ .$$

1) Der Fall: $\bar{k}_{n-p} > \bar{k}_{n-p+1}$:

a) Sei $n-p = 2\eta - 1$: durch Einsetzen von (8.4),(8.5) in (2.23) erhalten wir: (In den folgenden Determinanten bleibt die Vorzeichenwahl offen, weil die Zeilen in anderer Reihenfolge auftreten als in den Identitäten (2.23),(2.24) usw.)

$$(8.9)\qquad D_1 = \Theta_0 + \Theta_1 \cdot s =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \dots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & 0 \dots\dots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\sigma} & \dots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_\sigma} & \omega_{\mu_\eta}^{k_\sigma} & 0 \dots\dots 0 \\ 0 \dots\dots 0 & & & s\cdot\omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} \dots \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 \dots\dots 0 & & & s\cdot\omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau}} \dots \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\tau}} \end{vmatrix}$$

Dabei muß (2.32) beachtet werden. Für die Determinanten Θ_0 und Θ_1 gilt dann:

$$(8.10)\qquad \Theta_0 = \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\sigma} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\tau}} \end{vmatrix}$$

$$(8.11)\qquad \Theta_1 = \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\sigma} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\tau}} \end{vmatrix}$$

Wir sehen, daß eine der beiden Determinanten Θ_0 und Θ_1 stets gleich Null ist, so daß in diesem Falle zerfallende Randbedingungen stets N-irregulär sind.

b) Sei $n-p = 2\eta$: durch Einsetzen von (8.4),(8.5) in (2.24) erhalten wir:

$$(8.12)\qquad D_2 = \Theta_{-1}\, s^{-1} + \Theta_0 + \Theta_1\, s =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\sigma} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_\sigma} & \omega_{\mu_\eta}^{k_\sigma} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s\cdot\omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} & \frac{1}{s}\cdot\omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & s\cdot\omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau}} & \frac{1}{s}\cdot\omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau}} & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+\tau}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\tau}} \end{vmatrix}$$

Für die Determinanten Θ_{-1} und Θ_1 gilt dann:

$$(8.13)\quad \Theta_{-1} = \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\sigma} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+\tau}} \end{vmatrix}$$

$$(8.14)\quad \Theta_1 = \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\sigma} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_\sigma} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_\sigma} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau}} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+\tau}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+\tau}} \end{vmatrix}$$

Θ_{-1} und Θ_1 können nur dann von Null verschieden sein, wenn gilt:

$$(8.15)\qquad \sigma = \tau = \eta \;;$$

in diesem Falle aber sind sie tatsächlich von Null verschieden. Um dies zu beweisen, benötigen wir

Hilfssatz 8.1: Existiert für $\varkappa$ Einheitswurzeln eine Permutation ν, so daß

$$(8.16)\qquad \mathfrak{R}(S\omega_{\nu_1}) \leq \ldots \leq \mathfrak{R}(S\omega_{\nu_\varkappa}) \qquad \text{für } S \in S_\mu$$

und

(i) $\omega_{\nu_1} = \omega_{\mu_1}, \ldots, \omega_{\nu_\varkappa} = \omega_{\mu_\varkappa}$ oder

(ii) $\omega_{\nu_1} = \omega_{\mu_{u-\rho-\varkappa+1}}, \ldots, \omega_{\nu_\varkappa} = \omega_{\mu_{u-\rho}}$ oder

(iii) $\omega_{\nu_1} = \omega_{\mu_1}, \ldots, \omega_{\nu_{\varkappa-1}} = \omega_{\mu_{\varkappa-1}}, \omega_{\nu_\varkappa} = \omega_{\mu_{u-\rho}}$ oder

(iv) $\omega_{\nu_1} = \omega_{\mu_{n-p-\varkappa}}, \omega_{\nu_2} = \omega_{\mu_{n-p-\varkappa+2}}, \dots, \omega_{\nu_\varkappa} = \omega_{\mu_{n-p}}$

gilt, so existiert eine Permutation $\tilde{\pi}$ der Zahlen $\nu_1, \dots, \nu_\varkappa$, so daß gilt:

$$\omega_{\tilde{\pi}_{j+1}} = \omega_{\tilde{\pi}_j} \cdot e^{\frac{2\tilde{\pi}i}{n-p}} \qquad (j = 1,\dots,\varkappa-1) . \tag{8.17}$$

Die Behauptung von Hilfssatz 8.1 folgt deshalb, weil die Kombinationen (i)-(iv) gerade diejenigen sind, für die die Einheitswurzeln $\omega_{\nu_1}, \dots, \omega_{\nu_\varkappa}$ und damit auch die Einheitswurzeln $\omega_{\mu_{i_1}}, \dots, \omega_{\mu_{i_\varkappa}}$ benachbarte sind, d.h. in den Folgen obiger Einheitswurzeln treten keine "Lücken" auf.-
Zunächst untersuchen wir (8.13); durch Entwickeln nach den ersten η Zeilen erhalten wir:

$$\Theta_{-1} = \pm \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \dots & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_\eta} & \dots & \omega_{\mu_\eta}^{k_\eta} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \dots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\eta}} & \dots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\eta}} \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \omega_{\pi_{11}}^{k_1} & \dots & \omega_{\pi_{\eta 1}}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{\pi_{11}}^{k_\eta} & \dots & \omega_{\pi_{\eta 1}}^{k_\eta} \end{vmatrix} \cdot \tag{8.18}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \omega_{\pi_{12}}^{k_{m+1}} & \dots & \omega_{\pi_{\eta 2}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{\pi_{12}}^{k_{m+\eta}} & \dots & \omega_{\pi_{\eta 2}}^{k_{m+\eta}} \end{vmatrix} = \pm \omega_{\pi_{11}}^{k_1+\dots+k_\eta} \cdot \omega_{\pi_{12}}^{k_{m+1}+\dots+k_{m+\eta}} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & \zeta_1 & \dots & \zeta_1^{\eta-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta_\eta & \dots & \zeta_\eta^{\eta-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \zeta_{m+1} & \dots & \zeta_{m+1}^{\eta-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta_{m+\eta} & \dots & \zeta_{m+\eta}^{\eta-1} \end{vmatrix}$$

mit

$$\zeta_j := e^{\frac{2\tilde{\pi}i}{n-p} k_j} \qquad (j = 1,\dots,\eta \quad \text{bzw.} \quad j = m+1,\dots,m+\eta). \tag{8.19}$$

Dabei wurde in der zweiten Gleichung von (8.18) bereits Hilfssatz 8.1 (i) auf die erste, bzw. Hilfssatz 8.1 (ii) auf die zweite Determinante für $\varkappa = \eta$ angewandt. Nach (8.18) ist Θ_{-1} genau dann von Null verschieden, falls die beiden "Vandermondeschen" Determinanten nicht verschwinden, d.h. wenn die Zahlen in (8.19) für $j = 1,\dots,\eta$ bzw. $j = m+1,\dots,m+\eta$ verschieden sind; diese sind genau dann verschieden, wenn (2.35)(iii) erfüllt ist.

Der Beweis, daß Θ_1 genau dann von Null verschieden ist, wenn die Bedingung (2.35)(iii) erfüllt ist, folgt analog, wenn man Hilfssatz 8.1 (iii) bzw. (iv) anwendet, so daß wiederum Vandermondesche Determinanten entstehen. Schließlich ist (2.22) äquivalent mit (2.36) wegen (8.1)-(8.3), so daß die Behauptung von Satz 2.1 im Fall 1) bewiesen ist.

2) Der Fall: $\bar{k}_{n-p} = \bar{k}_{n-p+1}$:

Wir setzen die Abschätzungen (3.1)-(3.3) in die Randbedingungen (2.6),(2.7) ein:

$$(8.20)\quad U_j(\bar{y}_i(x,\varrho)) = U_j(h_i(x)) + O(\tfrac{1}{\varrho})\ ;\ \begin{Bmatrix} i = 1,\dots,p \\ j = 1,\dots,n \end{Bmatrix}$$

$$(8.21)\quad U_j(\bar{y}_i(x,\varrho)) = (\varrho\omega_{i-p})^{k_j}\cdot\bar{y}_o(0)\cdot[1]\ ;\ \begin{Bmatrix} i = p+1,\dots,n \\ j = 1,\dots,m \end{Bmatrix}$$

$$(8.22)\quad U_j(\bar{y}_i(x,\varrho)) = (\varrho\omega_{i-p})^{k_j} e^{\varrho\omega_{i-p}}\bar{y}_o(1)\cdot[1]\ ;\ \begin{Bmatrix} i = p+1,\dots,n \\ j = m+1,\dots,n \end{Bmatrix}$$

und bilden damit eine Abschätzung der charakteristischen Determinante (2.25):

$$(8.23)\quad D(\varrho) = \det\,(U_j(\bar{y}_i(x,\varrho))) =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} U_1(h_1)\dots U_1(h_p) & (\varrho\omega_{\mu_1})^{k_1}\bar{y}_o(0)\dots(\varrho\omega_{\mu_{n-p}})^{k_1}\bar{y}_o(0) \\ \vdots & \vdots \\ U_m(h_1)\dots U_m(h_p) & (\varrho\omega_{\mu_1})^{k_m}\bar{y}_o(0)\dots(\varrho\omega_{\mu_{n-p}})^{k_m}\bar{y}_o(0) \\ U_{m+1}(h_1)\dots U_{m+1}(h_p) & (\varrho\omega_{\mu_1})^{k_{m+1}} e^{\varrho\omega_{\mu_1}}\bar{y}_o(1)\dots(\varrho\omega_{\mu_{n-p}})^{k_{m+1}} e^{\varrho\omega_{\mu_{n-p}}}\bar{y}_o(1) \\ \vdots & \vdots \\ U_n(h_1)\dots U_n(h_p) & (\varrho\omega_{\mu_1})^{k_n} e^{\varrho\omega_{\mu_1}}\bar{y}_o(1)\dots(\varrho\omega_{\mu_{n-p}})^{k_n} e^{\varrho\omega_{\mu_{n-p}}}\bar{y}_o(1) \end{vmatrix} \cdot[1]$$

a) Sei $n-p = 2\eta-1$:

Eine Entwicklung von (8.23) gemäß (2.26) liefert unter Berücksichtigung von (2.32)-(2.34):

$$(8.24)\qquad \tilde{D}_0 = \begin{vmatrix} U_{\sigma+1}(h_1) & \cdots & U_{\sigma+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \cdots & U_m(h_p) \\ U_{m+\tau+1}(h_1) & \cdots & U_{m+\tau+1}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(h_1) & \cdots & U_n(h_p) \end{vmatrix}$$

$$(8.25)\qquad \tilde{D}_1 = \begin{vmatrix} U_{\sigma+2}(h_1) & \cdots & U_{\sigma+2}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \cdots & U_m(h_p) \\ U_{m+\tau}(h_1) & \cdots & U_{m+\tau}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_n(h_1) & \cdots & U_n(h_p) \end{vmatrix}$$

$$(8.26)\qquad \bar{M}_i = \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_{\sigma+i}} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_{\sigma+i}} & \omega_{\mu_\eta}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} e^{\xi\omega_{\mu_\eta}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau-i}} e^{\xi\omega_{\mu_\eta}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau-i}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+\tau-i}} \end{vmatrix}$$

$(i=0,1)$

Eine Entwicklung von $\bar{M}_i$ gemäß (2.27) liefert:

$$(8.27)\qquad \Theta_0^{(i)} = \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_{\sigma+i}} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau-i}} & \cdots & \omega_{\mu_{u-\rho}}^{k_{m+\tau-i}} \end{vmatrix}$$

$(i=0,1)$

und

$$(8.28)\quad \Theta_1^{(i)} = \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_{\sigma+i}} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau-i}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\tau-i}} \end{vmatrix} \qquad (i=0,1)$$

Aus (8.27) lesen wir ab, daß es genau zwei Möglichkeiten für die Wahl von σ gibt, so daß nicht beide Determinanten $\Theta_o^{(o)}$, $\Theta_o^{(1)}$ und damit $\widetilde{\Theta}_o$ nach (2.28) verschwinden:

(1) $\sigma = \eta$: $\Theta_o^{(1)} = 0$, also: $\widetilde{\Theta}_o \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{D}_o, \Theta_o^{(o)} \neq 0$;

(2) $\sigma = \eta - 1$: $\Theta_o^{(o)} = 0$, also: $\widetilde{\Theta}_o \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{D}_1, \Theta_o^{(1)} \neq 0$.

Analog erhalten wir aus (8.28) für $\widetilde{\Theta}_1$ nach (2.28):

(3) $\sigma = \eta - 2$: $\Theta_1^{(o)} = 0$, also: $\widetilde{\Theta}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{D}_1, \Theta_1^{(1)} \neq 0$;

(4) $\sigma = \eta - 1$: $\Theta_1^{(1)} = 0$, also: $\widetilde{\Theta}_1 \neq 0 \Leftrightarrow \widetilde{D}_o, \Theta_1^{(o)} \neq 0$.

Da für die N-Regularität $\widetilde{\Theta}_o, \widetilde{\Theta}_1 \neq 0$ gefordert wird, sind die Bedingungen (2),(4) notwendig und hinreichend für die N-Regularität. Nach Hilfssatz 8.1 lassen sich $\Theta_o^{(1)}$, $\Theta_1^{(o)}$ als Produkte zweier Vandermondescher Determinanten schreiben genau dann, wenn die Bedingung (2.37)(ii) erfüllt ist.

b) Sei $n-p = 2\eta$:

Eine Entwicklung von (8.23) gemäß (2.26) liefert unter Berücksichtigung von (2.32)-(2.34):

$$(8.29)\quad \overline{M}_i = \qquad (i=0,1)$$

$$= \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_{\sigma+i}} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_{\sigma+i}} & \omega_{\mu_\eta}^{k_{\sigma+i}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} \cdot e^{\varrho\omega_{\mu_\eta}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} \cdot e^{-\varrho\omega_{\mu_\eta}} & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau-i}} e^{\varrho\omega_{\mu_\eta}} & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau-i}} e^{-\varrho\omega_{\mu_\eta}} & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+\tau-i}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-p}}^{k_{m+\tau-i}} \end{vmatrix}$$

Eine Entwicklung von $\overline{M}_i$ gemäß (2.29) liefert:

$$(8.30)\quad \Theta_{-1}^{(i)} = \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_{\sigma+i}} & \cdots & \omega_{\mu_\eta}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-\rho}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{m+\tau-i}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-\rho}}^{k_{m+\tau-i}} \end{vmatrix} \qquad (i=0,1)$$

und

$$(8.31)\quad \Theta_{1}^{(i)} = \begin{vmatrix} \omega_{\mu_1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_1} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\mu_1}^{k_{\sigma+i}} & \cdots & \omega_{\mu_{\eta-1}}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+1}}^{k_{\sigma+i}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+1}} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-\rho}}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \omega_{\mu_\eta}^{k_{m+\tau-i}} & 0 & \omega_{\mu_{\eta+2}}^{k_{m+\tau-i}} & \cdots & \omega_{\mu_{n-\rho}}^{k_{m+\tau-i}} \end{vmatrix} \qquad (i=0,1)$$

Aus (8.30) lesen wir ab, daß es genau zwei Möglichkeiten für die Wahl von σ gibt, so daß nicht beide Determinanten $\Theta_{-1}^{(0)}$, $\Theta_{-1}^{(1)}$ und damit $\tilde{\Theta}_{-1}$ nach (2.30) verschwinden:

(1) $\sigma = \eta$: $\Theta_{-1}^{(1)} = 0$, also: $\tilde{\Theta}_{-1} \neq 0 \iff \tilde{D}_0, \Theta_{-1}^{(0)} \neq 0$;

(2) $\sigma = \eta - 1$: $\Theta_{-1}^{(0)} = 0$, also: $\tilde{\Theta}_{-1} \neq 0 \iff \tilde{D}_1, \Theta_{-1}^{(1)} \neq 0$.

Analog erhalten wir aus (8.31) für $\tilde{\Theta}_1$ nach (2.30):

(3) $\sigma = \eta$: $\Theta_{1}^{(1)} = 0$, also: $\tilde{\Theta}_{1} \neq 0 \iff \tilde{D}_0, \Theta_{1}^{(0)} \neq 0$;

(4) $\sigma = \eta - 1$: $\Theta_{1}^{(0)} = 0$, also: $\tilde{\Theta}_{1} \neq 0 \iff \tilde{D}_1, \Theta_{1}^{(1)} \neq 0$.

Da für die N-Regularität $\tilde{\Theta}_{-1}, \tilde{\Theta}_1 \neq 0$ gefordert wird, sind die Bedingungen (1)-(4) notwendig und hinreichend für die N-Regularität. Nach Hilfssatz 8.1 lassen sich $\Theta_{-1}^{(0)}$, $\Theta_1^{(0)}$ bzw. $\Theta_{-1}^{(1)}$, $\Theta_1^{(1)}$ als Produkte zweier Vandermondescher Determinanten schreiben genau dann, wenn die Bedingung (2.37)(ii) erfüllt ist; die Bedingung (2.37)(iii) entsteht aus (1)-(4) durch Einsetzen in (8.24),(8.25). Damit ist Satz 2.1 bewiesen.-

Beweis von Satz 3.2: a) Sei $n-m = 2\varkappa$ und $\varsigma \in \tilde{S}_{2\varkappa}$. Wir betrachten die charakteristische Determinante $D(\varsigma)$ in (8.23). Im Sektor $\tilde{S}_{2\varkappa}$ besitzt mindestens einer der Exponenten

$$(8.32) \quad (\omega_{-\varkappa} + \omega_{-\varkappa+1} + \ldots + \omega_{\varkappa-1})\cdot\varsigma$$

$$(8.33) \quad (\omega_{-\varkappa+1} + \ldots + \omega_{\varkappa-1} + \omega_{\varkappa})\cdot\varsigma$$

einen Realteil, der größer ist als der Realteil aller anderen Exponenten in der Entwicklung für $D(\varsigma)$. Durch geeignete Durchnumerierung der ω_j $(j = 0,\ldots,n-p-1)$ in (8.23) und Entwicklung der charakteristischen Determinante (8.23) nach den letzten n-m Zeilen entsteht wegen (8.32),(8.33) die asymptotische Darstellung

$$(8.34) \quad D(\varsigma) = \pm\, \overline{y}_0(0)^{m-p}\cdot \overline{y}_0(1)^{n-m}\cdot D_0\cdot \varsigma^{k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_n}\cdot$$
$$\cdot e^{\varsigma(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1})}\cdot \tilde{D}(\varsigma)\cdot [1]\,;$$

mit

$$(8.35) \quad \tilde{D}(\varsigma) := \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\varkappa}^{k_1} & \omega_{-\varkappa}^{k_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_{m-p}} & \cdots & \omega_{\varkappa}^{k_{m-p}} & \omega_{-\varkappa}^{k_{m-p}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0\ \omega_{\varkappa}^{k_{m+1}}\cdot e^{\varsigma\omega_{\varkappa}} & \omega_{-\varkappa}^{k_{m+1}}\cdot e^{\varsigma\omega_{-\varkappa}} & \cdots & & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0\ \omega_{\varkappa}^{k_n}\cdot e^{\varsigma\omega_{\varkappa}} & \omega_{-\varkappa}^{k_n}\cdot e^{\varsigma\omega_{-\varkappa}} & \cdots & & \omega_{\varkappa-1}^{k_n} \end{vmatrix}$$

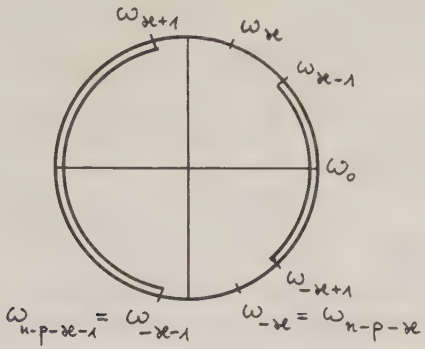
$$= \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\varkappa}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_{m-p}} & \cdots & \omega_{\varkappa}^{k_{m-p}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{-\varkappa}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{-\varkappa}^{k_n} & \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_n} \end{vmatrix} \cdot e^{\varsigma\omega_{-\varkappa}} -$$

$$- \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_1} & \cdots & \omega_{\varkappa+1}^{k_1} & \omega_{-\varkappa}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_{m-p}} & \cdots & \omega_{\varkappa+1}^{k_{m-p}} & \omega_{-\varkappa}^{k_{m-p}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{\varkappa}^{k_{m+1}} & \omega_{-\varkappa+1}^{k_{m+1}} & \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_{\varkappa}^{k_n} & \omega_{-\varkappa+1}^{k_n} & \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_n} \end{vmatrix} \cdot e^{\varsigma\omega_{\varkappa}}\,;$$

wenn man nach den letzten n-m Zeilen entwickelt. Beachtet man die

gewählte Durchnumerierung der n-p Einheitswurzeln ω_j (j = 0,... ...,n-p-1):

(8.36)



so gilt in (8.35):

$$(8.37)\quad \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_1} \cdots & \omega_{\varkappa+1}^{k_1} & \omega_{-\varkappa}^{k_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_{m-p}} \cdots & \omega_{\varkappa+1}^{k_{m-p}} & \omega_{-\varkappa}^{k_{m-p}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_1} \cdots & \omega_{\varkappa}^{k_1} \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa-1}^{k_{m-p}} \cdots & \omega_{\varkappa}^{k_{m-p}} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot (-1)^{m-p-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}\cdot(k_1 + \ldots + k_{m-p})} ;$$

$$(8.38)\quad \begin{vmatrix} \omega_{\varkappa}^{k_{m+1}} & \omega_{-\varkappa+1}^{k_{m+1}} \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{\varkappa}^{k_n} & \omega_{-\varkappa+1}^{k_n} \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{-\varkappa}^{k_{m+1}} \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & \vdots \\ \omega_{-\varkappa}^{k_n} \cdots & \omega_{\varkappa-1}^{k_n} \end{vmatrix} .$$

$$\cdot (-1)^{n-m-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}\cdot(k_{m+1} + \ldots + k_n)} .$$

Die rechten Determinanten in (8.37),(8.38) führen auf Vandermondesche Determinanten, welche wegen (2.48) und

$$(8.39)\quad 0 \le k_1 - k_{m-p} \le n-1-p < n-p \text{ , da } k_{m-p} \ge p \quad (k_m \ge 0);$$

von Null verschieden sind. Wegen der Voraussetzung (2.50) folgt schließlich aus der Bedingung $D(\varsigma_k) = 0$ für die Eigenwerte $\varsigma_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$ und aus (8.34),(8.35):

$$(8.40)\quad 0 = \left\{1 + (-1)^{n-p-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}(k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_n)} \cdot e^{\varsigma_k(\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa})}\right\} \cdot [1]_k$$

wenn man (8.37),(8.38) in (8.35) einsetzt und mit $e^{-\varsigma_k \omega_{-\varkappa}}$ multipli-

ziert. Wir beachten nun $e^{O(\frac{1}{\varsigma})} = 1 + O(\frac{1}{\varsigma}) = [1]$ und erhalten nach Logarithmieren in (8.40) für $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ und $\varsigma_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$:

$$(8.41)\quad 2\tilde{\pi}ik + \tilde{\pi}i(n-p) = \frac{2\tilde{\pi}i}{n-p}(k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_n) + \varsigma_k(\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa}) + O(\frac{1}{\varsigma_k})$$

und somit

$$(8.42)\quad \frac{1}{2i}\varsigma_k(\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa}) = \tilde{\pi}(k + \frac{n-p}{2} - \frac{k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_n}{n-p}) + O(\frac{1}{k}).$$

Dabei wurde in (8.41) bereits eine Numerierung der Eigenwerte ς_k für $k > k_o \geq 0$ und $\varsigma_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$ festgelegt. Wegen

$$(8.43)\quad \omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa} = 2i\sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\ ,\ \text{da}\ \omega_\varkappa = \overline{\omega}_{-\varkappa};$$

folgt aus (8.42) die Behauptung (3.6),(3.8).

b) Sei $n-m = 2\varkappa+1$ und $\varsigma \in \tilde{S}_{2\varkappa+1}$. In diesem Sektor besitzt mindestens einer der Exponenten

$$(8.44)\quad (\omega_{-\varkappa} + \omega_{-\varkappa+1} + \ldots + \omega_\varkappa)\cdot\varsigma$$

$$(8.45)\quad (\omega_{-\varkappa+1} + \ldots + \omega_\varkappa + \omega_{\varkappa+1})\cdot\varsigma$$

einen Realteil, der größer ist als der Realteil aller anderen Exponenten in der Entwicklung von $D(\varsigma)$. Der Beweis verläuft in diesem Falle analog zu a): man braucht nur $\varkappa-1$ durch $\varkappa$ und $\varkappa$ durch $\varkappa+1$ zu ersetzen und schließlich in (8.42)

$$(8.46)\quad \omega_{\varkappa+1} - \omega_{-\varkappa} = e^{\frac{\tilde{\pi}i}{n-p}}\cdot 2i\sin\frac{(2\varkappa+1)\tilde{\pi}}{n-p}$$

zu berücksichtigen. Damit ist Satz 3.2 bewiesen.-

Beweis von Satz 3.3: Wir betrachten zunächst wieder den Fall $n-m = 2\varkappa$: für genügend große k liegen die Kreise Γ_k (s.S.20) ganz im Sektor $\tilde{S}_{2\varkappa}$. Die Eigenwerte ς_k ergaben sich in (8.40) aus der Gleichung

$$(8.47)\quad d(\varsigma_k) := (1 - e^{i\vartheta}\cdot e^{\varsigma_k(\omega_\varkappa-\omega_{-\varkappa})})\cdot(1 + O(\frac{1}{\varsigma_k})) = 0$$

mit

$$(8.48)\quad \vartheta := \tilde{\pi}(n-p + \frac{2}{n-p}(k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_n)).$$

Die "Hauptwerte" ς_k^o sind Lösungen von

$$(8.49)\quad 1 - e^{i\vartheta}\cdot e^{\varsigma_k^o(\omega_\varkappa-\omega_{-\varkappa})} = 0\ .$$

Wegen (8.49) ist (8.47) äquivalent mit

$$(8.50) \qquad e^{(\varsigma_k - \varsigma_k^o)(\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa})} - 1 + O(\frac{1}{\varsigma_k}) = 0$$

Nach (8.165) gilt außerhalb und auf der Peripherie der Kreise Γ_k die Ungleichung:

$$(8.51) \qquad |f(\varsigma)| > K_1 > 0 \quad \text{für} \quad f(\varsigma) := e^{(\varsigma - \varsigma_k^o)(\omega_\varkappa - \omega_{-\varkappa})} - 1$$

mit einer Konstanten K_1. Wir setzen $g(\varsigma) := O(\frac{1}{\varsigma})$ und beachten, daß $f(\varsigma)$ und $g(\varsigma)$ holomorphe Funktionen in der komplexen ς-Ebene sind. Außerdem erfüllen sie für $k > k_o$ auf dem Rand der Kreise Γ_k die Ungleichung

$$(8.52) \qquad |g(\varsigma)| < |f(\varsigma)| \text{ , da } \left|O(\tfrac{1}{\varsigma})\right| < \frac{K_1}{2} \text{ für hinreichend große } |\varsigma|,$$

so daß nach dem Satz von Rouché die Funktionen $f(\varsigma)$ und $d(\varsigma) = f(\varsigma) + g(\varsigma)$ für $k > k_o$ innerhalb der Kreise Γ_k gleich viele Nullstellen, nämlich eine, besitzen.
Der Fall $n-m = 2\varkappa+1$ läßt sich ebenso behandeln.-

Beweis von Satz 3.4: Sei $n-m = 2\varkappa$: Wir setzen die asymptotischen Darstellungen (3.1)-(3.3) und (8.20)-(8.22) in (3.9) ein:

$$(8.53) \qquad y_k^o(z) =$$

$$= \begin{vmatrix} h_1(z) & \cdots & h_p(z) & e^{\varsigma_k\omega_1 z}\overline{y}_o(z) & \cdots & e^{\varsigma_k\omega_{n-p} z}\overline{y}_o(z) \\ U_1(h_1) & \cdots & U_1(h_p) & (\varsigma_k\omega_1)^{k_1}\overline{y}_o(0) & \cdots & (\varsigma_k\omega_{n-p})^{k_1}\overline{y}_o(0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \cdots & U_m(h_p) & (\varsigma_k\omega_1)^{k_m}\overline{y}_o(0) & \cdots & (\varsigma_k\omega_{n-p})^{k_m}\overline{y}_o(0) \\ U_{m+1}(h_1) & \cdots & U_{m+1}(h_p) & (\varsigma_k\omega_1)^{k_{m+1}}e^{\varsigma_k\omega_1}\overline{y}_o(1) & \cdots & (\varsigma_k\omega_{n-p})^{k_{m+1}}e^{\varsigma_k\omega_{n-p}}\overline{y}_o(1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{n-1}(h_1) & \cdots & U_{n-1}(h_p) & (\varsigma_k\omega_1)^{k_{n-1}}e^{\varsigma_k\omega_1}\overline{y}_o(1) & \cdots & (\varsigma_k\omega_{n-p})^{k_{n-1}}e^{\varsigma_k\omega_{n-p}}\overline{y}_o(1) \end{vmatrix}$$

$$\cdot [1]_k \cdot$$

Wir entwickeln nach der ersten Zeile und wenden dann den Laplaceschen Satz an:

$$(8.54) \qquad y_k^o(z) = \sum_{j=1}^{p} h_j(z)\cdot C_j(\varsigma_k) + \sum_{j=p+1}^{n} e^{\varsigma_k\omega_{j-p} z}\overline{y}_o(z)\cdot C_j(\varsigma_k) \text{ ,}$$

mit:

$$(8.55)\quad C_j(\varrho_k) = \pm\, e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1})} \cdot \overline{y}_o(0)^{m-p+1} \cdot \overline{y}_o(1)^{n-m-1} \cdot \varrho_k^{k_1+\ldots+k_{m-p+1}+k_{m+1}+\ldots+k_{n-1}} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} U_{m-p+2}(h_1) & \ldots & U_{m-p+2}(h_p) \\ \vdots & & \vdots \\ U_m(h_1) & \ldots & U_m(h_p) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa}^{k_1} & \ldots & \omega_{\varkappa}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa}^{k_{m-p+1}} & \ldots & \omega_{\varkappa}^{k_{m-p+1}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{-\varkappa+1}^{k_{m+1}} & \ldots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{-\varkappa+1}^{k_{n-1}} & \ldots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{n-1}} \end{vmatrix} \cdot$$

j-te Spalte fehlt!

$$\cdot [1]_k \cdot$$

denn die Realteile der n-m-1 komplexen Zahlen $\varrho_k\omega_{-\varkappa+1}, \ldots$ $\ldots, \varrho_k\omega_{\varkappa-1}$ majorisieren wegen $\varrho_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$ und (8.36) sämtliche anderen $\varrho_k\omega_j$. Weiter gilt aus demselben Grunde:

$$(8.56)\quad C_j(\varrho_k) = \pm\, e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1})} \cdot \overline{y}_o(0)^{m-p} \cdot \overline{y}_o(1)^{n-m-1} \cdot D_o \cdot$$

$$\cdot \varrho_k^{k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_{n-1}} \begin{vmatrix} \omega_{n-p-\varkappa}^{k_1} & \ldots & \omega_{\varkappa}^{k_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n-p-\varkappa}^{k_{m-p}} & \ldots & \omega_{\varkappa}^{k_{m-p}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_{-\varkappa+1}^{k_{m+1}} & \ldots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{m+1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{-\varkappa+1}^{k_{n-1}} & \ldots & \omega_{\varkappa-1}^{k_{n-1}} \end{vmatrix} \cdot$$

$(m+\varkappa-j+1)$-te Spalte fehlt!

$$\cdot [1]_k$$

für $j-p = n-p-\varkappa, \ldots, \varkappa$.

Sei nun $j-p = -\varkappa+1, \ldots, \varkappa-1$; wegen $\varrho_k \in \tilde{S}_{2\varkappa}$ majorisieren die Realteile der Exponenten

$$(8.57)\qquad \varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}) - \varrho_k\omega_{j-p} + \varrho_k\omega_{-\varkappa}$$

$$(8.58)\qquad \varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}) - \varrho_k\omega_{j-p} + \varrho_k\omega_{\varkappa}$$

alle anderen Exponenten in der Laplaceschen Entwicklung der Minoren der ersten Zeile von (8.53) nach den letzten n-m-1 Zeilen. Wir berücksichtigen also die Exponenten (8.57),(8.58) in der Form:

$$(8.59)\qquad \varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}) - \varrho_k\omega_{j-p} + \varrho_k\omega_{\gamma_1}$$

und erhalten damit:

$$(8.60)\quad C_j(\varrho_k) = O(\varrho_k^{k_1+\ldots+k_{m-p}+k_{m+1}+\ldots+k_{n-1}} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1})} \cdot e^{\varrho_k\omega_{\gamma_1} - \varrho_k\omega_{j-p}}) \quad \text{für } j-p=-\varkappa+1,\ldots,\varkappa-1 .$$

Beachten wir die Anmerkung auf S.14, so folgt aus (8.54)-(8.56) und (8.60) die Behauptung (3.15). Sei nun $x \in (0,1)$: dann liest man aus (8.55),(8.56) und (8.57),(8.58) ab, daß in (8.54) die Exponenten für $j-p = n-p-\varkappa, \varkappa$ in (8.56):

$$\left.\begin{aligned} &(8.61)\quad \varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}) + \varrho_k\omega_{-\varkappa}\cdot x \\ &(8.62)\quad \varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}) + \varrho_k\omega_{\varkappa}\cdot x \end{aligned}\right\} \quad x \in (0,1)$$

diejenigen mit größten Realteilen sind; wir berücksichtigen noch, daß die beiden Terme in (8.54) mit dem größten Realteil des Exponenten (nämlich (8.61),(8.62)) sich um das Vorzeichen $(-1)^{m-p}$ und die zugehörigen Determinanten in (8.56) sich um den Faktor

$$e^{\frac{2\pi i}{n-p}(k_1+\ldots+k_{m-p})}$$

unterscheiden, so daß (3.11) bewiesen ist.
Der Fall $n-m = 2\varkappa+1$ läßt sich ebenso behandeln.-

Beweis von Satz 4.1: Aus der Voraussetzung über die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4.1) folgt: es gibt eine Konstante K_2, so daß

$$(8.63)\quad |c_k \cdot y_k(x)| \leq K_2 \quad \text{für alle } k \geq 1 \text{ und } x \in [x_0,x_1].$$

Sei $n-m = 2\varkappa$: Nach Satz 3.4 (3.11) gilt für $x \in (0,1)$:

$$(8.64)\quad y_k^0(x) = \alpha_k(x) \cdot e^{\varrho_k\omega_{-\varkappa}\cdot x} \cdot \left[1 + (-1)^{m-p} \cdot e^{\frac{2\pi i}{n-p}(k_1+\ldots+k_{m-p})} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{\varkappa}-\omega_{-\varkappa})x}\right] \cdot [\,]_k \ ;$$

mit: $\alpha_k(x) := \pm\alpha \cdot \varrho_k^{K-k_n} \cdot e^{\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1})} \cdot \bar{y}_0(x)$.

Für die Eigenfunktionen $y_k(x)$ können wir dann schreiben:

$$(8.65)\quad y_k(x) = b_k \cdot y_k^0(x) \ .$$

Beachten wir (3.8) und (8.43), also:

$$(8.66)\quad \varrho_k(\omega_{\varkappa}-\omega_{-\varkappa}) = \varrho_k^0 \cdot 2i \sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} + O(\tfrac{1}{k}) \quad \text{für } k > k_0 ,$$

---

[1]) vgl. auch (8.83)-(8.86).

so existieren offenbar zu jedem $k > k_0$ ein x_k mit

$$0 < x_0 \leq x_k \leq x_1 < 1 \; ; \quad (x_0 < x_1) \tag{8.67}$$

und eine ganze Zahl q, so daß

$$q\cdot\tilde{\pi} = \varrho_k^0 \cdot x_k \cdot \sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} + \frac{\tilde{\pi}}{2}\left(m-p+\frac{2}{n-p}(k_1+\ldots+k_{m-p})\right) \tag{8.68}$$

gilt. Demnach folgt aus (8.64) und (8.68):

$$y_k^0(x) = \alpha_k(x)\cdot e^{\varrho_k\omega_{-\varkappa}x}\cdot\left(1+e^{2\tilde{\pi}\,i\,q}\right)\cdot[1]_k \quad \text{für } x = x_k \cdot \; (k > k_0) \tag{8.69}$$

Da $\overline{y}_0(x)$ eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung (2.16) ist, existiert eine Konstante K_3, unabhängig von x, so daß für alle $x\in[0,1]$ gilt:

$$|\alpha_k(x)| \geq K_3\cdot|d_k| \; , \text{ mit } \; d_k := \varrho_k^{K-k_n}\varrho_k(\omega_{-\varkappa+1}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}) \cdot \tag{8.70}$$

Beachten wir außerdem noch die Abschätzung:

$$\left|e^{\varrho_k\omega_{-\varkappa}x}\right| \geq \frac{1}{2}e^{\varrho_k^0\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot x} \quad \text{für } k > k_0, \tag{8.71}$$

die aus (3.8) und $\omega_{-\varkappa} = e^{-\frac{2\tilde{\pi}i}{n-p}\varkappa}$ folgt, so können wir nun mit Hilfe von (8.69)-(8.71) die Eigenfunktionen in $x = x_k$ nach unten abschätzen (für $k > k_0$):

$$|y_k(x_k)| \geq e^{\varrho_k^0\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot x_k}\cdot\frac{K_3}{2}\cdot|b_k||d_k| \; . \tag{8.72}$$

Diese Abschätzung der Eigenfunktionen liefert mit (8.63) eine Abschätzung der c_k:

$$|c_k| \leq \frac{2\cdot K_2}{K_3|b_k||d_k|}e^{-\varrho_k^0\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot x_k} \leq \frac{2\cdot K_2}{K_3|b_k||d_k|}e^{-\varrho_k^0\cdot\cos\frac{2\tilde{\pi}\varkappa}{n-p}\cdot x_0} \; . \tag{8.73}$$

Es sei nun x_2 eine Zahl mit $0 < x_2 < x_0$, und sei $z = x + iy$. Wir bestimmen jetzt dasjenige Gebiet der komplexen z-Ebene, in dem die Ungleichung

$$|y_k(z)| \leq K_4|b_k||d_k|\,e^{\varrho_k^0\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot x_2} \quad \text{(mit einer Konstanten } K_4) \tag{8.74}$$

erfüllt ist. Aus Satz 3.4 (3.15) und (8.90) folgern wir, daß (8.74) für alle z erfüllt wird, für die sowohl

$$K_6\left|e^{\varrho_k\omega_\nu(z-1)} + \varrho_k\omega_{\nu_1}\right| \leq e^{\varrho_k^0\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot x_2} \tag{8.75}$$

für $\nu = -\varkappa+1,\ldots,\varkappa-1$, mit einer Konstanten K_6, als auch

(8.76) $K_6' \cdot \left| e^{\varsigma_k \omega_\nu z} \right| \leq e^{\varsigma_k^0 \cdot \cos \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \cdot x_2}$ (mit einer Konstanten K_6')

für $\nu = n-p-\varkappa, \ldots, \varkappa$ gilt.

Da es zwei Konstanten K_7, K_8 gibt, so daß für alle k gilt:

(8.77) $$K_7 \cdot e^{\varsigma_k^0} \leq \left| e^{\varsigma_k} \right| \leq K_8 \cdot e^{\varsigma_k^0} ,$$

(man braucht ja nur mit $e^{-\varsigma_k^0}$ zu multiplizieren um zu erkennen, daß dann der mittlere Term für $k \to \infty$ gegen 1 strebt!), so ist (8.74) gewiß dann erfüllt, wenn (wie aus (8.76),(8.77) folgt):

(8.78) $$e^{\varsigma_k^0 \cdot \Re(\omega_\nu z)} \leq e^{\varsigma_k^0 \cdot \cos \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \cdot x_2} \quad \text{für } \nu = n-p-\varkappa, \ldots, \varkappa$$

(bei geeigneter Wahl der Konstanten K_6, K_6', K_4) erfüllt ist. [1])
(8.78) ist äquivalent mit:

(8.79) $$x \cdot \cos \frac{2\tilde{\pi}\nu}{n-p} - y \cdot \sin \frac{2\tilde{\pi}\nu}{n-p} \leq x_2 \cdot \cos \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \quad \text{für } \nu = n-p-\varkappa, \ldots, \varkappa .$$

Also erhalten wir ein Polygon um $[0, x_2]$ mit den m-p+1 Eckpunkten: $x_2,\ x_2 \cdot e^{\frac{(2\nu-1)\tilde{\pi} i}{n-p}} \cdot \cos \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \,/\, \cos \frac{\tilde{\pi}}{n-p}$.

Aus (8.73) und (8.74) folgt für das allgemeine Glied der Reihe (4.1):

(8.80) $$\left| c_k \cdot y_k(z) \right| \leq K_9 \cdot e^{(x_2 - x_0) \cdot \varsigma_k^0 \cdot \cos\left(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi}\right)}$$

für jedes z aus dem Polygon.

Aus der Anmerkung auf S.14 zu den Sätzen 3.1 und 3.4 folgt die gleichmäßige Konvergenz im Innern und auf dem Rande des Polygons. Da jedes Reihenglied in $|z| \leq 1$ holomorph ist, folgt die Holomorphie der Reihe im Innern und auf dem Rande des Polygons. Da schließlich die Punkte x_2, x_0 mit: $0 < x_2 < x_0 < x_1 \leq 1$ beliebig dicht an x_1 heranrücken dürfen, folgt daraus die Behauptung von Satz 4.1. Der Fall n-m = 2ϰ+1 läßt sich ebenso behandeln.-

Beweis von Satz 4.4: 1) Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz:
Hilfssatz 8.2: Für die Eigenfunktionen $y_k(x)$ des Rand-Eigenwertproblems A_0 gelten die für $k > k_0$ und $x \in [0,c]$ $(c \geq c_0 > 0)$ gleichmäßigen Abschätzungen: $(r = 0,1,2,\ldots,n-1)$:

(8.81) $$\left| D^r y_k(x) \right| \leq K_{10} \cdot |b_k| |d_k| |\varsigma_k|^r \cdot e^{\varsigma_k^0 \cdot \cos\left(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi}\right) \cdot c}$$

mit einer von x,k,r unabhängigen Konstanten $K_{10}(c_0)$.

[1]) (8.75) ist notwendig für (8.76); man sieht dies leicht ein, wenn man auch (8.75) in der Form (8.79) schreibt!

Beweis von Hilfssatz 8.2: Sei $n-m = 2\varkappa$: aus (8.55),(8.70) folgt:

$$(8.82)\quad h_j(z)\cdot C_j(\varrho_k) = O(d_k\cdot \varrho_k^{k_{m-p+1}}) \quad \text{für } j = 1,\dots,p$$

gleichmäßig für $|z| \leq 1$. Entsprechend folgt aus (8.56):

$$(8.83)\quad e^{\varrho_k\omega_{j-p}z}\cdot\overline{y}_o(z)\cdot C_j(\varrho_k) = O(d_k e^{\varrho_k\omega_{j-p}z}) \quad \text{für } j-p = n-p-\varkappa,\dots,\varkappa$$

gleichmäßig für $|z| \leq 1$; und aus (8.57),(8.58) folgt:

$$(8.84)\quad e^{\varrho_k\omega_{j-p}z}\cdot\overline{y}_o(z)\cdot C_j(\varrho_k) = O(d_k e^{\varrho_k\omega_{j-p}\cdot(z-1)+\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}}) \quad {}^{1)}\ {}^{2)}$$

für $j-p = -\varkappa+1,\dots,\varkappa-1$ gleichmäßig für $|z| \leq 1$. Wegen

$$(8.85)\quad x-1 \leq 0: \Re(\varrho_k\omega_{j-p}\cdot(x-1)+\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}) \leq \Re(\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}x)$$

für $x\in[0,1]$ und für $j-p = -\varkappa+1,\dots,\varkappa-1$, und wegen

$$(8.86)\quad \Re(\varrho_k\omega_{j-p}x) \leq \Re(\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}x) \quad \text{für } j-p = n-p-\varkappa,\dots,\varkappa$$

und für $x\in[0,1]$ erhalten wir wiederum die Exponenten (8.61),(8.62) in (8.83) als diejenigen mit den größten Realteilen in (8.83) und (8.84). Somit folgt mit (8.65) und (8.54) aus (8.82)-(8.86):

$$(8.87)\quad y_k^o(x) = O(d_k\cdot\varrho_k^{k_{m-p+1}}) + O(d_k e^{\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}x}) \quad \text{für } x\in[0,1] .$$

und weiter durch Differentiation in (8.82)-(8.84):

$$(8.88)\quad D^r y_k(x) = O(b_k d_k\varrho_k^{k_{m-p+1}}) + O(b_k d_k\varrho_k^r\cdot e^{\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}x})$$

gleichmäßig für $x\in[0,1]$. Nun gelten weiterhin die Abschätzungen

$$(8.89)\quad \left|e^{\varrho_k\omega_{\pm\varkappa}x}\right| \leq K_{11}\cdot e^{\varrho_k^o\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot x} \quad \text{für } x\in[0,1]$$

für $k > k_o$ mit einer von x,k unabhängigen Konstanten K_{11};

$$(8.90)\quad |\varrho_k|^{k_{m-p+1}} \leq K_{12}\cdot e^{\varrho_k^o\cdot\cos\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot c} \quad \text{für } c \geq c_o > 0$$

für $k > k_o$ mit einer nur von c_o abhängigen Konstanten K_{12}. Durch Einsetzen von (8.89),(8.90) in (8.88) erhalten wir die Behauptung (8.81). Der Fall $n-m = 2\varkappa+1$ läßt sich ebenso behandeln.-

---

1) Das obere Vorzeichen gilt für den Teilsektor $-\frac{\pi}{n-p} \leq \arc\varrho_k \leq 0$, das untere für den Teilsektor $0 \leq \arc\varrho_k \leq \frac{\pi}{n-p}$.

2) Die Abschätzungen wurden für in $|z| \leq 1$ holomorphe Koeffizientenfunktionen formuliert.

Sei $[d,b]$ ein Teilintervall von $(c,b]$ und $(a,b]$, d.h.

$$\max\{c,a\} < d < b \quad . \tag{8.91}$$

Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe (4.10) gleichmäßig auf $[a,b]$, also auch auf $[d,b]$. Deshalb folgt analog zu (8.73):

$$|c_k| \leq \frac{K_{13}}{|b_k||d_k|}\, e^{-\varrho_k^0 \cdot \cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})\cdot d} \quad \text{für} \quad k > k_0 \quad . \tag{8.92}$$

Da für die Eigenfunktionen $y_k(x)$ gilt:

$$m(y_k) = \varrho_k^{n-p} \cdot \tilde{N}\, y_k \tag{8.93}$$

so gilt für die Reihen (4.11):

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q y_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \varrho_k^{q(n-p)} D^r y_k(x) \quad . \tag{8.94}$$

Für die Reihenglieder in (8.94) ergibt sich aus (8.92) und (8.81) die Abschätzung:

$$\left|c_k \cdot \varrho_k^{q(n-p)} D^r y_k(x)\right| \leq K_{14} |\varrho_k|^{q(n-p)+r} \cdot e^{\varrho_k^0 \cdot \cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})\cdot(c-d)} \tag{8.95}$$

für $x \in [0,c]$ und $k > k_0$.

Deshalb konvergieren die Reihen (4.11) absolut und gleichmäßig auf dem Intervall $[0,c]$ mit $0 < c < b$.-

2) Aus (8.88),(8.89) können wir schließen:

$$\left|D^r y_k(x)\right| \leq K_{15} |b_k||d_k||\varrho_k|^{r+k_{m-p+1}}\, e^{\varrho_k^0 \cdot \cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})\cdot x} \tag{8.96}$$

für $x \in [0,1]$ mit einer von x,k,r unabhängigen Konstanten K_{15} und für $k > k_0$, $r = 0,1,2,\ldots,n-1$.

Mit Satz 4.4 1), (8.92) und (8.96) erhalten wir nun:

$$\left|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right| \leq K_{16} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |\varrho_k|^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \cdot e^{\varrho_k^0 \cdot \cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})\cdot(x-d)} \tag{8.97}$$

für $x \in [0,1]$, $k > k_0$, $r = 0,\ldots,n-1$, $q = 0,1,2,\ldots$.

Sei nun $n-m = 2\varkappa$: dann gilt nach Satz 3.1:

$$\varrho_k = \varrho_k^1 + O(1) \quad \text{für } k > k_0 \text{ ; mit } \varrho_k^1 := \frac{\tilde{\varkappa}\cdot k}{\sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}} \quad . \tag{8.98}$$
$$= \varrho_k^1(1 + O(\tfrac{1}{k}))$$

Berücksichtigen wir noch

$$(8.99)\qquad \varsigma_k^0 = \varsigma_k^1 + \frac{\tilde{\pi}}{\sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}}\left(\frac{n-p}{2} - \frac{k_1+..+k_{m-p}+k_{m+1}+..+k_n}{n-p}\right) ,$$

so folgt aus (8.97) und (8.98):

$$(8.100)\qquad \left|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right| \le K_{17} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\tilde{\pi}\cdot k}{\sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}}\right)^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \cdot \left\{1 + \frac{\bar{K}_{17}}{k}\right\}^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \cdot \exp\left(\frac{\tilde{\pi}\cdot k(x-d)}{\tan(\frac{n-m}{n-p}\pi)}\right) = \sum_{k=1}^{k_o-1}\cdots + \sum_{k=k_o}^{\infty}\cdots .$$

Sei $\delta > 0$ und so gewählt, daß

$$(8.101)\qquad 0 < b - \delta < d$$

gilt. Weiterhin sei k_o so groß gewählt, daß

$$(8.102)\qquad \frac{\bar{K}_{17}}{k} \le \delta \quad \text{für} \quad k \ge k_o$$

gilt. Die endliche Summe in (8.100) läßt sich abschätzen durch:

$$(8.103)\qquad \left|\sum_{k=1}^{k_o-1}\cdots\right| \le K_{18}^{\,q(n-p)+r}$$

Zur Abschätzung der unendlichen Summe in (8.100) verwenden wir Hilfssatz 8.3: Seien ξ , $\eta > 0$. Dann gilt:

$$(8.104)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\xi} e^{-k\eta} \le (1+\sqrt{\tfrac{2}{\pi}})\,\xi!\cdot\eta^{-\xi} .$$

(Beweis: [12], S.316).

Setzen wir:

$$(8.105)\qquad \xi := q(n-p)+r+k_{m-p+1} \; ; \; \eta := \frac{\tilde{\pi}(d-x)}{\tan(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})} > 0 : x < d ,$$

so folgt aus (8.104) und (8.103) für (8.100):

$$(8.106)\qquad \left|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right| \le K_{18}^{\,q(n-p)+r} + K_{19}\cdot(q(n-p)+r+k_{m-p+1})!\cdot \left(\frac{\tilde{\pi}}{\sin(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})}\right)^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \cdot \left(\frac{\tan(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})}{(d-x)\cdot\tilde{\pi}}\right)^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \cdot (1+\delta)^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \le$$

$$\leq K_{18}^{q(n-p)+r} + K_{19}\left(\frac{1+\delta}{(d-x)\cos(\frac{n-m}{n-p}\pi)}\right)^{q(n-p)+r+k_{m-p+1}} \cdot$$

$$\cdot (q(n-p)+r+k_{m-p+1})! \quad .$$

Berücksichtigen wir schließlich noch (8.101) und (8.105):

(8.107) $\quad 0 \leq x \leq b - \delta < d;\ d-x \geq d-b+\delta > 0$ für $x \in [0, b-\delta]$

und

(8.108) $\quad (s+t)! \leq 2^{s+t}\, s!\, t! = K_{20} \cdot 2^s s!$ für $s = 0,1,2,\ldots$

falls t eine beliebige, aber feste nicht-negative ganze Zahl ist, (Beweis zu (8.108) s. z.B. in [11],S.239), so erhalten wir aus (8.106) die Abschätzung (4.12). Der Fall n-m = 2ϰ+1 läßt sich ebenso behandeln.-

3) Aus Satz 4.4 1), (4.10),(4.11),(8.94) folgt unmittelbar die Behauptung, da die Eigenfunktionen $y_k(x)$ die Randbedingungen erfüllen.-

Beweis von Satz 5.1: Für die Greensche Funktion $G(x,\xi,\varrho)$ machen wir den folgenden üblichen Ansatz:

$$(8.109) \qquad G(x,\xi,\varrho) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i(x,\varrho)\cdot a_i(\xi); & (x \leq \xi) \\ \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i(x,\varrho)\cdot b_i(\xi); & (x \geq \xi) \end{array} \right\} .$$

Dabei sind die Koeffizientenfunktionen $a_j(\xi)$, $b_j(\xi)$ bestimmt durch die Gleichungen:

Randbedingungen:

$$(8.110) \quad U_j(G(x,\xi,\varrho)) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{n} U_j(\overline{y}_i(x,\varrho))\cdot a_i(\xi) = 0; & (j=1,\ldots,m) \\ \sum_{i=1}^{n} U_j(\overline{y}_i(x,\varrho))\cdot b_i(\xi) = 0; & (j=m+1,\ldots,n) \end{array} \right\}$$

Stetigkeits- und Sprungrelation:

$$(8.111) \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s G(x,\xi,\varrho)_{/x=\xi+0} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s G(x,\xi,\varrho)_{/x=\xi-0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i^{(s)}(x,\varrho)_{/x=\xi} \cdot (b_i(\xi)-a_i(\xi)) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } s < n-1 \\ 1 & s = n-1 \end{array} \right\} .$$

Sei zunächst $x < \xi$: Die Gleichungen (8.109)-(8.111) bilden ein homogenes System in den Koeffizientenfunktionen $a_i(\xi)$, $b_i(\xi)$:

$$
(8.112)\qquad
0 = \begin{vmatrix}
U_1(\bar{y}_1) & \cdots & U_1(\bar{y}_n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
U_m(\bar{y}_1) & \cdots & U_m(\bar{y}_n) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & U_{m+1}(\bar{y}_1) & \cdots & U_{m+1}(\bar{y}_n) & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & U_n(\bar{y}_1) & \cdots & U_n(\bar{y}_n) & 0 \\
-\bar{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n(\xi,\varrho) & \bar{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n(\xi,\varrho) & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
-\bar{y}_1^{(n-2)}(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n^{(n-2)}(\xi,\varrho) & \bar{y}_1^{(n-2)}(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n^{(n-2)}(\xi,\varrho) & 0 \\
-\bar{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \bar{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho) & 1 \\
\bar{y}_1(x,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n(x,\varrho) & 0 & \cdots & 0 & G(x,\xi,\varrho)
\end{vmatrix}
$$

Entwickeln wir nach der letzten Spalte, so ergibt sich:

$$
(8.113)\qquad G(x,\xi,\varrho) = \frac{G_0(x,\xi,\varrho)}{\theta(\xi,\varrho)}
$$

mit:

$$
(8.114)\qquad \theta(\xi,\varrho) := \begin{vmatrix}
U_1(\bar{y}_1) & \cdots & U_1(\bar{y}_n) & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
U_m(\bar{y}_1) & \cdots & U_m(\bar{y}_n) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & U_{m+1}(\bar{y}_1) & \cdots & U_{m+1}(\bar{y}_n) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & U_n(\bar{y}_1) & \cdots & U_n(\bar{y}_n) \\
-\bar{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n(\xi,\varrho) & \bar{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n(\xi,\varrho) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-\bar{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \bar{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho)
\end{vmatrix}
$$

$$
(8.115)\qquad G_0(x,\xi,\varrho) := \begin{vmatrix}
U_1(\bar{y}_1) & \cdots & U_1(\bar{y}_n) & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
U_m(\bar{y}_1) & \cdots & U_m(\bar{y}_n) & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & U_{m+1}(\bar{y}_1) & \cdots & U_{m+1}(\bar{y}_n) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & U_n(\bar{y}_1) & \cdots & U_n(\bar{y}_n) \\
-\bar{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n(\xi,\varrho) & \bar{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n(\xi,\varrho) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-\bar{y}_1^{(n-2)}(\xi,\varrho) & \cdots & -\bar{y}_n^{(n-2)}(\xi,\varrho) & \bar{y}_1^{(n-2)}(\xi,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n^{(n-2)}(\xi,\varrho) \\
\bar{y}_1(x,\varrho) & \cdots & \bar{y}_n(x,\varrho) & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

Die Determinante (8.114) formen wir um, indem wir zu den Elementen der 1., 2.,...,n-ten Spalte die Elemente der (n+1)-ten, (n+2)-ten,..., 2n-ten Spalte addieren:

$$(8.116)\quad \Theta(\xi,\varrho) = \begin{vmatrix} U_1(\bar{y}_1) \dots U_1(\bar{y}_n) & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ U_m(\bar{y}_1) \dots U_m(\bar{y}_n) & 0 \dots 0 \\ U_{m+1}(\bar{y}_1) \dots U_{m+1}(\bar{y}_n) & U_{m+1}(\bar{y}_1) \dots U_{m+1}(\bar{y}_n) \\ \vdots & \vdots \\ U_n(\bar{y}_1) \dots U_n(\bar{y}_n) & U_n(\bar{y}_1) \dots U_n(\bar{y}_n) \\ 0 \dots 0 & \bar{y}_1(\xi,\varrho) \dots \bar{y}_n(\xi,\varrho) \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots 0 & \bar{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) \dots \bar{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho) \end{vmatrix}$$

Eine Entwicklung nach den ersten n Spalten liefert:

$$(8.117)\qquad \Theta(\xi,\varrho) = W(\xi,\varrho)\cdot D(\varrho)$$

wie nach (7.1),(7.2) zu erwarten ist; setzen wir die Abschätzungen (3.1)-(3.3) in (7.2) ein, so erhalten wir:

$$(8.118)\quad W(\xi,\varrho) = \begin{vmatrix} h_1(\xi) \dots h_p(\xi) & e^{\varrho\omega_1\xi}\bar{y}_0(\xi) \dots e^{\varrho\omega_{n-p}\xi}\bar{y}_0(\xi) \\ \vdots & \vdots \\ h_1^{(n-1)}(\xi) \dots h_p^{(n-1)}(\xi) & (\varrho\omega_1)^{n-1} e^{\varrho\omega_1\xi}\bar{y}_0(\xi) \dots (\varrho\omega_{n-p})^{n-1} e^{\varrho\omega_{n-p}\xi}\bar{y}_0(\xi) \end{vmatrix}.$$

$$\cdot [1] = \begin{vmatrix} h_1(\xi) \dots h_p(\xi) \\ \vdots \\ h_1^{(p-1)}(\xi) \dots h_p^{(p-1)}(\xi) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \omega_1^p \dots \omega_{n-p}^p \\ \vdots \\ \omega_1^{n-1} \dots \omega_{n-p}^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \bar{y}_0(\xi)^{n-p} \cdot$$

$$\cdot \varrho^{p+\dots+(n-1)} \cdot e^{\varrho(\omega_1+\dots+\omega_{n-p})\xi} \cdot [1] =$$

$$= W(h,\xi)\cdot V(\omega)\cdot \bar{y}_0(\xi)^{n-p} \cdot \varrho^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}} \cdot [1]$$

mit:

$$(8.119)\quad W(h,\xi) := \begin{vmatrix} h_1(\xi) \dots h_p(\xi) \\ \vdots \\ h_1^{(p-1)}(\xi) \dots h_p^{(p-1)}(\xi) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{(wegen (2.15))}$$

$$(8.120)\qquad V(\omega) := \begin{vmatrix} \omega_1^{p} & \cdots & \omega_{n-p}^{p} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{n-p}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

(Vandermondesche Determinante).

Bei der Umformung der Determinante (8.115) verfahren wir wie auf S.83 oben beschrieben bei der Determinante (8.114) und erhalten anschließend aus der Entwicklung dieser umgeformten Determinante nach der letzten Zeile:

$$(8.121)\qquad G_o(x,\xi,\varrho) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i} \cdot \bar{y}_i(x,\varrho) \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot W_j(\xi,\varrho) \cdot D_{ij}^{1}(\varrho).$$

Dabei ist $W_j(\xi,\varrho)$ das algebraische Komplement des Elementes $\bar{y}_j^{(n-1)}(\xi,\varrho)$ in der Wronskideterminante (7.2), und es gilt:

$$(8.122)\qquad D_{ij}^{1}(\varrho) =$$

$$= \begin{vmatrix} U_1(\bar{y}_1) & \cdots & U_1(\bar{y}_{i-1}) & U_1(\bar{y}_{i+1}) & \cdots & U_1(\bar{y}_n) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_m(\bar{y}_1) & \cdots & U_m(\bar{y}_{i-1}) & U_m(\bar{y}_{i+1}) & \cdots & U_m(\bar{y}_n) & 0 \\ U_{m+1}(\bar{y}_1) & \cdots & U_{m+1}(\bar{y}_{i-1}) & U_{m+1}(\bar{y}_{i+1}) & \cdots & U_{m+1}(\bar{y}_n) & U_{m+1}(\bar{y}_j) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ U_n(\bar{y}_1) & \cdots & U_n(\bar{y}_{i-1}) & U_n(\bar{y}_{i+1}) & \cdots & U_n(\bar{y}_n) & U_n(\bar{y}_j) \end{vmatrix}.$$

Setzen wir die Abschätzungen (3.1)-(3.3) in (7.2) ein, so erhalten wir analog zu (8.118):

$$(8.123)\qquad W_j(\xi,\varrho) = W_j(h,\xi) \cdot V'(\omega) \cdot \bar{y}_o(\xi)^{n-p} \cdot \varrho^{\frac{(n-p)(n+p-3)}{2}} \cdot [1]; \quad j=1,\ldots,p$$

mit

$$(8.124)\qquad W_j(h,\xi) := \begin{vmatrix} h_1(\xi) & \cdots & \overset{j\text{-te Spalte fehlt!}}{\overbrace{}} & h_p(\xi) \\ \vdots & & & \vdots \\ h_1^{(p-2)}(\xi) & \cdots & & h_p^{(p-2)}(\xi) \end{vmatrix} \quad j=1,\ldots,p$$

$$(8.125)\qquad V'(\omega) := \begin{vmatrix} \omega_1^{p-1} & \cdots & \omega_{n-p}^{p-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-2} & \cdots & \omega_{n-p}^{n-2} \end{vmatrix} \neq 0$$

(Vandermondesche Determinante)

(8.126) $W_j(\xi,\varrho) = W(h,\xi)\cdot V(\omega_{j-p})\cdot \overline{y}_o(\xi)\,\varrho^{n-p-1}\,\varrho^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}-(n-1)}\cdot$

$j=p+1,\dots,n$

$\cdot\, e^{-\varrho\omega_{j-p}\xi}\,[1]$;

mit:

(8.127) $V(\omega_{j-p}) := \begin{vmatrix} 1 & \cdots & p & \cdots & n-p \\ \omega_1 & \cdots & \omega_1^p & \cdots & \omega_{n-p}^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-2} & \cdots & \omega_1^{n-2} & \cdots & \omega_{n-p}^{n-2} \end{vmatrix}$

(j-p)-te Spalte fehlt!

Als nächstes stellt sich die Aufgabe, die Determinanten $D(\varrho)$ und $D^1_{ji}(\varrho)$ abzuschätzen:
Sei $n-m = 2\varkappa$: Im Teilsektor $\varepsilon \le \arg\varrho \le \frac{\tilde{\pi}}{n-p}$ gehen wir von der Darstellung

(8.128) $D(\varrho) = \overline{\gamma}_1\cdot \varrho^{k_1+\dots+k_{m-p}+k_{m+1}+\dots+k_n}\cdot e^{\varrho(\omega_{-\varkappa}+\dots+\omega_{\varkappa-1})}\cdot$

$\cdot\left\{1+(-1)^{n-p-1}\, e^{\frac{2\tilde{\pi}i}{n-p}(k_1+\dots+k_{m-p}+k_{m+1}+\dots+k_n)}\cdot e^{\varrho(\omega_\varkappa-\omega_{-\varkappa})}\right\}[1]$

mit einer von ϱ unabhängigen Konstanten $\overline{\gamma}_1$ aus; diese Darstellung folgt aus (8.34),(8.40). Wegen $\varepsilon \le \arg\varrho$ und $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$ für $0 \le \varphi \le \frac{\tilde{\pi}}{2}$ folgt ($\varrho = |\varrho| e^{i\varphi}$):

(8.129) $\left| e^{\varrho(\omega_\varkappa-\omega_{-\varkappa})}\right| = \left| e^{2i\varrho\sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}}\right| \le e^{-\frac{4}{\pi}\sin\frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}\cdot\varepsilon|\varrho|} = O\left(\frac{1}{\varepsilon\varrho}\right)$

und deshalb:

(8.130) $D(\varrho) = \overline{\gamma}_1\cdot\varrho^K\cdot e^{\varrho K_o}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{\varepsilon\varrho}\right)\right)$; $\varepsilon \le \arg\varrho \le \frac{\tilde{\pi}}{n-p}$,

mit:

(8.131) $K_o := \omega_{-\varkappa}+\dots+\omega_{\varkappa-1}$.

Im Teilsektor $\frac{\tilde{\pi}}{n-p} \le \arg\varrho \le \frac{2\tilde{\pi}}{n-p}-\varepsilon$ gehen wir von der Darstellung:

(8.132) $D(\varrho) = \overline{\gamma}_2\cdot\varrho^K\cdot e^{\varrho K_o}\cdot\left\{1+(-1)^{n-p-1}\, e^{\frac{2\tilde{\pi}i}{n-p}K}\cdot e^{\varrho(\omega_{-\varkappa-1}-\omega_{\varkappa-1})}\right\}[1]$

mit einer von ϱ unabhängigen Konstanten $\overline{\gamma}_2$ aus, die analog zu (8.128) aus (8.34),(8.40) folgt, wenn man nur berücksichtigt, daß im Sektor

$$\frac{\tilde{\pi}}{n-p} \le \arg\varrho \le \frac{3\tilde{\pi}}{n-p}$$

nicht mehr die Exponenten (8.32),(8.33), sondern die Exponenten

(8.133) $(\omega_{-\varkappa-1}+\omega_{-\varkappa}+\dots+\omega_{\varkappa-2})\cdot\varrho$

(8.134) $\quad (\omega_{-\varkappa} + \ldots + \omega_{\varkappa-2} + \omega_{\varkappa-1})\varsigma$

diejenigen in der Entwicklung (8.23) von $D(\varsigma)$ sind, die den größten Realteil haben. Über eine zu (8.129) analoge Abschätzung gelangen wir für (8.132) zu einer (8.130) entsprechenden Abschätzung, so daß wir zusammenfassend erhalten:

(8.135) $\quad D(\varsigma) = \gamma \cdot \varsigma^{K} \cdot e^{\varsigma K_0} \cdot (1 + O(\frac{1}{\varepsilon\varsigma}))$ für $\varsigma \in T_{2\varkappa}^{(\varepsilon)}$

mit einer von ς unabhängigen Konstanten γ.
Durch Einsetzen der Abschätzungen (3.1)-(3.3) in (8.122) gelangen wir zu Abschätzungen der $D_{ij}^{1}(\varsigma)$:

(8.136) $\quad D_{ij}^{1}(\varsigma) =$

$$= \begin{vmatrix} U_1(h_1) \ldots U_1(h_p) & (\varsigma\omega_1)^{k_1}\bar{y}_0(0) \ldots (\varsigma\omega_{u-p})^{k_1}\bar{y}_0(0) & 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots & \vdots \\ U_m(h_1) \ldots U_m(h_p) & (\varsigma\omega_1)^{k_m}\bar{y}_0(0) \ldots (\varsigma\omega_{u-p})^{k_m}\bar{y}_0(0) & 0 \\ U_{m+1}(h_1) \ldots U_{m+1}(h_p) & (\varsigma\omega_1)^{k_{m+1}} e^{\varsigma\omega_1}\bar{y}_0(1) \ldots (\varsigma\omega_{u-p})^{k_{m+1}} e^{\varsigma\omega_{u-p}}\bar{y}_0(1) & V_1^j \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots & \vdots \\ U_n(h_1) \ldots U_n(h_p) & (\varsigma\omega_1)^{k_n} e^{\varsigma\omega_1}\bar{y}_0(1) \ldots (\varsigma\omega_{u-p})^{k_n} e^{\varsigma\omega_{u-p}}\bar{y}_0(1) & V_{n-m}^j \end{vmatrix}$$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ i-te Spalte fehlt! $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad

(8.140) $\varrho(\omega_{\nu_{m+2}}+\ldots+\omega_{\nu_n})$; $1\le i,j\le p$

(8.141) $\varrho(\omega_{\nu_{m+2}}+\ldots+\omega_{\nu_n})+\varrho\omega_{j-p}(1-\xi)$; $1\le i\le p$, $p+1\le j\le n$

(8.142) $\varrho(\omega_{\nu_{m+2}}+\ldots+\omega_{\nu_n})+\varrho\omega_{i-p}x$; $p+1\le i\le n$, $1\le j\le p$

(8.143) $\varrho(\omega_{\nu_{m+2}}+\ldots+\omega_{\nu_n})+\varrho\omega_{i-p}x+\varrho\omega_{j-p}(1-\xi)$; $p+1\le i,j\le n$

wobei in (8.141),(8.142),(8.143): $j-p$, $i-p\notin\{\nu_{m+2},\ldots,\nu_n\}$ beachtet werden muß. Die Hauptterme von $G_o(x,\xi,\varrho)$ erhält man, wenn man in der Entwicklung von (8.136) die Glieder mit $i=j$ berücksichtigt, für die ω_{i-p} eine der Einheitswurzeln $\omega_{-\varkappa},\ldots,\omega_{\varkappa-1}\in K_o$ ist; in diesem Falle ergibt sich aus (8.143) für die Hauptterme folgende Exponenten der Exponentialfaktoren in $G_o(x,\xi,\varrho)$:

(8.144) $\varrho K_o+\varrho\omega_{i-p}(x-\xi)$ für $i-p=-\varkappa,\ldots,\varkappa-1$,

für $0<x<\xi<1$ und $0<\arg\varrho<\frac{2\pi}{n-p}$.

Um dies einzusehen, betrachten wir den Ausdruck (8.143) für $i=j$ und $\omega_{i-p}\notin K_o$: der Realteil des Ausdrucks wird gerade dann am größten, wenn im Bereich $0<\arg\varrho\le\frac{\pi}{n-p}$ die Kombination $\omega_{\nu_{m+2}},\ldots,\omega_{\nu_n}$ die Einheitswurzeln $\omega_{-\varkappa+1},\ldots,\omega_{\varkappa-1}$ bilden; da $1+x-\xi>0$ ist, wird $(1+x-\xi)\Re(\varrho\omega_{i-p})$ dann am größten, wenn $\omega_{i-p}=\omega_{\varkappa}$. Im Bereich $\frac{\pi}{n-p}\le\arg\varrho<\frac{2\pi}{n-p}$ müssen wir die Kombination $\omega_{-\varkappa},\ldots,\omega_{\varkappa-2}$ wählen, und $\omega_{i-p}=\omega_{-\varkappa-1}$. Wir erhalten also im Falle $i=j$ und $\omega_{i-p}\notin K_o$ für die Exponenten (8.143) mit größtem Realteil:

(8.145) $\varrho K_o-\varrho\omega_{-\varkappa}+\varrho\omega_{\varkappa}(1+x-\xi)$ für $0<\arg\varrho\le\frac{\pi}{n-p}$

(8.146) $\varrho K_o-\varrho\omega_{\varkappa-1}+\varrho\omega_{-\varkappa-1}(1+x-\xi)$ für $\frac{\pi}{n-p}\le\arg\varrho<\frac{2\pi}{n-p}$

Durch analoge Überlegungen erhalten wir im Falle $i\neq j$, wobei der stets wiederkehrende Anteil ϱK_o weggelassen wird:

a) $\omega_{i-p}\in K_o$, $\omega_{j-p}\in K_o$: $\quad 0<\arg\varrho\le\frac{\pi}{n-p}$ | $\frac{\pi}{n-p}\le\arg\varrho<\frac{2\pi}{n-p}$

$1-\xi\ge x$: $-\varrho\omega_{-\varkappa}(1-x)-\varrho\omega_{\varkappa-1}\xi+\varrho\omega_{\varkappa}$; $-\varrho\omega_{\varkappa-1}(1-x)-\varrho\omega_{-\varkappa}\xi+\varrho\omega_{-\varkappa-1}$

$1-\xi\le x$: $-\varrho\omega_{\varkappa-1}(1-x)-\varrho\omega_{-\varkappa}\xi+\varrho\omega_{\varkappa}$; $-\varrho\omega_{-\varkappa}(1-x)-\varrho\omega_{\varkappa-1}\xi+\varrho\omega_{-\varkappa-1}$

b) $\omega_{i-p} \notin K_o$, $\omega_{j-p} \in K_o$:

$$\varrho\omega_{\varkappa}x - \varrho\omega_{-\varkappa}\xi \quad ; \quad \varrho\omega_{-\varkappa-1}x - \varrho\omega_{\varkappa-1}\xi$$

c) $\omega_{i-p} \in K_o$, $\omega_{j-p} \notin K_o$:

$$-\varrho\omega_{-\varkappa}(1-x) + \varrho\omega_{\varkappa}(1-\xi) \; ; \; -\varrho\omega_{\varkappa-1}(1-x) + \varrho\omega_{-\varkappa-1}(1-\xi)$$

d) $\omega_{i-p} \notin K_o$, $\omega_{j-p} \notin K_o$:

$$1-\xi \geq x: \varrho\omega_{\varkappa}x + \varrho\omega_{-\varkappa-1}(1-\xi) - \varrho\omega_{-\varkappa}; \varrho\omega_{-\varkappa-1}x + \varrho\omega_{\varkappa}(1-\xi) - \varrho\omega_{\varkappa-1}$$

$$1-\xi \leq x: \varrho\omega_{-\varkappa-1}x + \varrho\omega_{\varkappa}(1-\xi) - \varrho\omega_{-\varkappa}; \varrho\omega_{\varkappa}x + \varrho\omega_{-\varkappa-1}(1-\xi) - \varrho\omega_{\varkappa-1}$$

wobei der Ausdruck für $0 < \arg\varrho \leq \frac{\pi}{n-p}$ stets zuerst genannt ist. Der Realteil jeder der angegebenen Ausdrücke (der Anteil ϱK_o muß jedesmal hinzugefügt werden!) ist kleiner als

(8.147) $\Re(\varrho K_o + \varrho\omega_{-\varkappa}(x-\xi))$ im Bereich $0 < \arg\varrho \leq \frac{\tilde{\pi}}{n-p}$

(8.148) $\Re(\varrho K_o + \varrho\omega_{\varkappa-1}(x-\xi))$ im Bereich $\frac{\tilde{\pi}}{n-p} \leq \arg\varrho < \frac{2\tilde{\pi}}{n-p}$

und deshalb majorisieren die Terme (8.144) alle anderen, insbesondere auch die in den weiteren Fällen für i und j auftretenden Ausdrücke (8.140)-(8.142).

Wir müssen nun eine Abschätzung der $D^1_{ii}(\varrho)$ für $i-p = -\varkappa,\dots,\varkappa-1$ angeben: durch Vergleich der Determinanten (8.136) und $D(\varrho)$ in (8.23) erkennen wir, daß die für große $|\varrho|$ dominierenden Glieder bis auf das Vorzeichen übereinstimmen; aus (8.135) folgt also unmittelbar die Abschätzung:

(8.149) $$D^1_{ii}(\varrho) = (-1)^{n-i} \cdot \gamma \cdot \varrho^{K} \cdot e^{\varrho K_o} \cdot (1 + O(\frac{1}{\varepsilon\varrho})) \quad \text{für} \quad \varrho \in T^{(\varepsilon)}_{2\varkappa} \; .$$

$$\text{für} \quad i-p = -\varkappa,\dots,\varkappa-1 \; .$$

Aus (8.113),(8.117) und (8.121) folgt zunächst:

(8.150) $$G(x,\xi,\varrho) = -\sum_{i-p=-\varkappa}^{\varkappa-1} \bar{y}_i(x,\varrho) \cdot \frac{W_i(\xi,\varrho)}{W(\xi,\varrho)} \cdot \frac{D^1_{ii}(\varrho)}{D(\varrho)} \cdot [1]$$

$$\text{für } 0 < x < \xi < 1 \quad \text{und } 0 < \arg\varrho < \frac{2\tilde{\pi}}{n-p} \; ;$$

mit:

(8.151) $$\frac{W_i(\xi,\varrho)}{W(\xi,\varrho)} = \frac{V(\omega_{i-p})}{V(\omega)} \cdot \bar{y}_o(\xi) \cdot \varrho^{-1} \cdot \varrho^{-(n-1)} \cdot e^{-\varrho\omega_{i-p}\xi} \cdot [1]$$

wie sich aus (8.126) und (8.118) ergibt.

Mit (8.127) und Entwickeln von (8.120) nach der letzten Zeile erhält man:

$$(8.152)\qquad V(\omega) = \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{n-p-k} \cdot V(\omega_k) \cdot \omega_k^{n-1}$$

und deshalb das Gleichungssystem:

$$(8.153)\qquad \sum_{k=1}^{n-p} (-1)^{n-p-k} \cdot \frac{V(\omega_k)}{V(\omega)} \cdot \omega_k^{l} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & l = n-1 \\ 0 & \text{für } l = p,\dots,n-2 \end{array} \right\} .$$

Dieses System hat eine eindeutige Lösung:

$$(8.154)\qquad \frac{V(\omega_k)}{V(\omega)} = (-1)^{n-p-k} \cdot \frac{1}{n-p} \cdot \omega_k^{1-p} \quad , \text{ weil } \omega_k^{n-p} = 1 .$$

Schließlich setzen wir in (8.150) die Abschätzungen (8.149), (8.135), (8.151) mit (8.154), und (3.3) ein:

$$(8.155)\qquad G(x,\xi,\varrho) = -\frac{\bar{y}_o(x)\cdot\bar{y}_o(\xi)^{-1}}{(n-p)\cdot\varrho^{n-1}} \sum_{k=-\varkappa}^{\varkappa-1} \omega_k^{1-p} \cdot e^{\varrho\,\omega_k(x-\xi)} \left(1 + O\left(\frac{1}{\varepsilon\varrho}\right)\right),$$

woraus die Behauptung (5.6) für $x < \xi$ folgt. Im Falle $n-m = 2\varkappa+1$ verlaufen die Überlegungen analog.-

Sei nun $x > \xi$: Vergleichen wir die Darstellungen (7.10) für $x > \xi$ und (8.121),(8.113),(8.117) für $x < \xi$, so ist klar, daß nur noch $D^o_{ij}(\varrho)$ auf Hauptterme zu untersuchen ist: nach Einsetzen der Abschätzungen (8.20)-(8.22) in (7.9), Entwickeln der Determinante (7.9) nach den letzten n-m Zeilen und Einsetzen der Abschätzungen (3.1)-(3.3),(8.123) und (8.126) in (7.5), d.h. in:

$$(8.156)\qquad G_o(x,\xi,\varrho) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \bar{y}_i(x,\varrho) \sum_{j=1}^{n} (-1)^j W_j(\xi,\varrho) \cdot D^o_{ij}(\varrho),$$

erhalten wir wiederum (8.140)-(8.143) für die Exponenten der Exponentialfaktoren.

Sei $n-m = 2\varkappa$: Die Hauptterme erhält man wie zuvor für $i = j$, wobei ω_{i-p} im Gegensatz zu (8.144) folgende Einheitswurzeln durchläuft:

$$(8.157)\qquad \varrho K_o + \varrho\,\omega_{i-p}(x-\xi) \quad \text{für } i-p = \varkappa,\dots,n-p-\varkappa-1$$

$$\text{für } 0 < \xi < x < 1 \quad \text{und} \quad 0 < \arg\varrho < \frac{2\tilde{\varkappa}}{n-p} \quad ,$$

denn die Exponenten aller übrigen e-Potenzen in der Entwicklung (8.156) besitzen kleinere Realteile; wir machen die gleichen Fallunterscheidungen wie zuvor und erhalten die folgenden Ausdrücke:

$$0 < \arg \varrho \leq \frac{\tilde{\pi}}{n-p} \quad ; \quad \frac{\tilde{\pi}}{n-p} \leq \arg \varrho < \frac{2\tilde{\pi}}{n-p}$$

1. Fall: $i = j$

a) $\omega_{i-p} \notin K_o$: $\quad \varrho\omega_{\varkappa}(x-\xi) \quad ; \varrho\omega_{-\varkappa-1}(x-\xi)$ Hauptterme

b) $\omega_{i-p} \in K_o$: $- \varrho\omega_{-\varkappa}(1-x+\xi) + \varrho\omega_{\varkappa}$; $- \varrho\omega_{\varkappa-1}(1-x+\xi) + \varrho\omega_{-\varkappa-1}$

Im 2. Fall: $i \neq j$ erhalten wir wiederum die Fälle a)-d) auf S.87 und 88. Der Realteil jeder der angegebenen Ausdrücke ist kleiner als (der Anteil ϱK_o muß jedesmal hinzugefügt werden!):

(8.158) $\Re(\varrho K_o + \varrho\omega_{\varkappa}(x-\xi))$ im Bereich $0 < \arg \varrho \leq \frac{\tilde{\pi}}{n-p}$

(8.159) $\Re(\varrho K_o + \varrho\omega_{-\varkappa-1}(x-\xi))$ im Bereich $\frac{\tilde{\pi}}{n-p} \leq \arg \varrho < \frac{2\tilde{\pi}}{n-p}$,

und deshalb majorisieren die Terme (8.157) alle anderen, insbesondere auch die in den weiteren Fällen für i und j auftretenden Ausdrücke (8.140)-(8.142). Wegen (7.9) ist leicht einzusehen, daß $D^o_{ii}(\varrho)$ derselben Abschätzung genügt wie $D^1_{ii}(\varrho)$ in (8.149), so daß aus (7.10),(8.151),(8.154),(3.3) und (8.157) folgt:

$$(8.160) \quad G(x,\xi,\varrho) = \sum_{i-p=\varkappa}^{n-p-\varkappa-1} \frac{\overline{y}_o(x)\cdot\overline{y}_o(\xi)^{-1}}{(n-p)\cdot\varrho^{n-1}} \cdot \omega_{i-p}^{1-p} \cdot e^{\varrho\omega_{i-p}(x-\xi)} \cdot$$

$$\cdot (1 + O(\frac{1}{\varepsilon\varrho})) \quad \text{für } \varrho \in T^{(\varepsilon)}_{2\varkappa} \text{ und } 0 < \xi < x < 1,$$

woraus die Behauptung (5.6) für $x > \xi$ folgt. Im Falle $n-m = 2\varkappa+1$ verlaufen die Überlegungen analog. Damit ist Satz 5.1 bewiesen.-

Beweis von Satz 5.2: Wir beweisen zunächst folgenden

Hilfssatz 8.4: Die charakteristische Determinante $D(\varrho)$ in (8.23) genügt auf der Peripherie und außerhalb der Kreise Γ_k der Abschätzung:

a) im Falle $n-m = 2\varkappa$ im Sektor $S_{2\varkappa}$:

$$(8.161) \quad |D(\varrho)| > |\overline{\gamma}_1||\varrho|^K \cdot e^{\Re(\varrho(\omega_{-\varkappa}+\ldots+\omega_{\varkappa-1}))} \cdot \frac{\delta}{2}\cdot\sin\frac{2\tilde{\pi}}{n-p}$$

b) im Falle $n-m = 2\varkappa+1$ im Sektor $S_{2\varkappa+1}$:

$$(8.162) \quad |D(\varrho)| > |\overline{\gamma}_2||\varrho|^K \cdot e^{\Re(\varrho(\omega_{-\varkappa}+\ldots+\omega_{\varkappa}))} \cdot \frac{\delta}{2}\cdot\sin\frac{2\tilde{\pi}}{n-p} \ .$$

Beweis: Sei $n-m = 2\varkappa$: Im Teilsektor $0 \leq \arg \varrho \leq \frac{\tilde{\pi}}{n-p}$ gehen wir von der Darstellung (8.128) aus und untersuchen den Ausdruck in

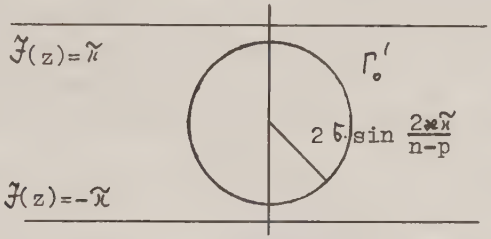
der geschweiften Klammer: mit den Bezeichnungen in (8.48) und (8.51) gilt:

$$f(\varrho) = e^{i\vartheta} \cdot e^{\varrho(\omega_{\varkappa} - \omega_{-\varkappa})} - 1 \quad ; \tag{8.163}$$

und zwar wegen (8.49). Wir substituieren

$$z := i\vartheta + \varrho(\omega_{\varkappa} - \omega_{-\varkappa}) \quad . \tag{8.164}$$

Die Kreise Γ_k gehen in die Kreise Γ'_k vom Radius $2\delta \sin \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p}$ mit den Mittelpunkten $z_k = 2\tilde{\pi} i k$ über. Da die Funktion $f(z) = e^z - 1$ die Periode $2\tilde{\pi} i$ besitzt, genügt es, ihr Verhalten im Streifen D: $-\tilde{\pi} \leq \mathfrak{J}(z) \leq \tilde{\pi}$ zu untersuchen (vgl. [10] S.60):



Wegen $\lim_{\mathfrak{R}(z)\to+\infty} |1 - e^z| = \infty$ und $\lim_{\mathfrak{R}(z)\to-\infty} |1 - e^z| = 1$ folgt, daß für genügend kleines δ das Minimum von $|1 - e^z|$ für $z \in D$ auf der Peripherie von Γ'_o liegt. Mit

$$z = 2\delta e^{i\varphi} \cdot \sin \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \quad ;$$

ergibt sich aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion um $\delta = 0$:

$$\left|f(2\delta \sin \tfrac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \cdot e^{i\varphi})\right| = \left|1 - e^{2\delta \cdot \sin \frac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} \cdot e^{i\varphi}}\right| > 2\delta \sin \tfrac{2\varkappa\tilde{\pi}}{n-p} - 2\delta^2 |h(\varrho)|$$

$$> \delta \cdot \sin \tfrac{2\tilde{\pi}}{n-p} \quad \text{für } \delta < \delta_o,$$

wobei $h(\delta)$ eine reguläre Funktion von δ ist, die für $\delta \to 0$ gegen 1 strebt. Also gilt:

$$|f(\varrho)| > \delta \cdot \sin \frac{2\tilde{\pi}}{n-p} \quad \text{außerhalb und auf der Peripherie} \tag{8.165}$$

der Kreise Γ_k mit den Radien $\delta < \delta_o$. Berücksichtigen wir schließlich noch $|[1]| \geq \frac{1}{2}$, so folgt (8.161) aus (8.128) und (8.165). Im Sektor $\frac{\pi}{n-p} \leq \arc \varrho \leq \frac{2\pi}{n-p}$ gehen wir von der Darstellung (8.132) aus und und wenden die gleichen Überlegungen auf die Funktion

$$f(\varrho) := e^{i\vartheta} \cdot e^{\varrho(\omega_{-\varkappa-1} - \omega_{\varkappa-1})} - 1 \tag{8.166}$$

an. Der Fall $n-m = 2\varkappa+1$ läßt sich ebenso behandeln.-

Sei zunächst $x \leq \xi$: Wir unterscheiden in der Greenschen Funktion die vier Summanden (7.11),(7.12); wie die Überlegungen von S.87/88 im Fall $0 < x < \xi < 1$ gezeigt haben, so majorisieren die Terme (8.147),(8.148) alle anderen in $G_1(x,\xi,\varrho)W(\xi,\varrho)D(\varrho)$ auftretenden Terme (8.143) für $\varrho \in S_{2\varkappa}$ (man beachte jetzt, daß $x=0, \xi=1$ und $\arc\varrho = 0, \frac{2\pi}{n-p}$ zugelassen sind!). Analog zu (8.155) erhalten wir aus den entsprechenden Abschätzungen und aus (8.147),(8.148) und (8.161) für $n-m = 2\varkappa$:

$$(8.167)\quad |G_1(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_1^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-1}}\,e^{(x-\xi)\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})}\quad ;(0\leq x\leq\xi\leq 1).$$

Um die anderen Summanden $G_2(x,\xi,\varrho),\ldots,G_4(x,\xi,\varrho)$ abschätzen zu können, müssen wir $D^1_{ij}(\varrho)$ für alle weiteren Fälle von i,j abschätzen: durch Einsetzen der Abschätzungen (8.20)-(8.22) in (8.122) und Entwickeln nach den letzten n-m Zeilen erhalten wir:

$$(8.168)\quad D^1_{ij}(\varrho) = \left\{\begin{array}{l} O(\varrho^{K-k_n+k_{m-p+1}}\cdot e^{\varrho K_o-\varrho\omega_{\alpha_1}});\ 1\leq i,j\leq p \\ O(\varrho^{K+k_{m-p+1}}\cdot e^{\varrho K_o});\ 1\leq i\leq p,\ p+1\leq j\leq n \\ O(\varrho^{K-k_n}\cdot e^{\varrho K_o-\varrho\omega_{\alpha_1}});\ p+1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p \end{array}\right\}.$$

Wir brauchen jetzt nur noch in die Darstellungen

$$(8.169)\quad G_k(x,\xi,\varrho) = \sum_{j(k)}\frac{W_j(\xi,\varrho)}{W(\xi,\varrho)}\sum_{i(k)}(-1)^{i+j+1}\cdot\overline{y}_i(x,\varrho)\cdot\frac{D^1_{ij}(\varrho)}{D(\varrho)}$$
$$(k = 2,3,4)$$

die zugehörigen Abschätzungen (8.118),(8.123),(8.126),(3.1), (8.161) und (8.168) einzusetzen, die Terme (8.140)-(8.142) mit den größten Realteilen der Exponenten in $G_k(x,\xi,\varrho)W(\xi,\varrho)D(\varrho)$ $(k = 2,3,4)$ für $\varrho \in S_{2\varkappa}$ zu berücksichtigen, um folgende Abschätzungen zu bekommen: sei $n-m = 2\varkappa$; dann gilt:

$$(8.170)\quad |G_2(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_2^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-1-k_{m-p+1}}}\,e^{-\xi\cdot\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})}\quad ;(0\leq x\leq\xi\leq 1)$$

$$(8.171)\quad |G_3(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_3^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-p+k_n}}\cdot e^{(x-1)\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})}\quad ;\ (0\leq x\leq\xi\leq 1)$$

$$(8.172)\quad |G_4(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_4^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-p+k_n-k_{m-p+1}}}\,e^{-\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})}\quad ;(0\leq x\leq\xi\leq 1).$$

Für s = t = 0 folgt die Behauptung (5.8) aus (8.167),(8.170)-(8.172). Der Fall n-m = 2ϰ+1 läßt sich ebenso behandeln. Sei nun $x \geq \xi$: Im Falle n-m = 2ϰ gilt: da die Terme (8.158), (8.159) alle anderen Terme (8.143) majorisieren, folgt analog zu (8.167):

$$(8.173)\quad |G_1(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_1^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-1}}\,e^{(x-\xi)\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})}\quad;(0\leq\xi\leq x\leq 1)$$

Entsprechend (8.168) erhalten wir aus (7.9) nach Einsetzen der Abschätzungen (8.20)-(8.22) und Entwickeln nach den letzten n-m Zeilen:

$$(8.174)\quad D^0_{ij}(\varrho)=\begin{cases} O(\varrho^{K-k_n+k_{m-p+1}}e^{\varrho K_0-\varrho\omega_{\alpha_1}});(i\neq j)\\ O(\varrho^{K}e^{\varrho K_0});(i=j)\end{cases}\Big\}\ 1\leq i,j\leq p$$
$$\left.\begin{array}{l} O(\varrho^{K+k_{m-p+1}}e^{\varrho K_0});\quad 1\leq i\leq p,\ p+1\leq j\leq n\\ O(\varrho^{K-k_n}e^{\varrho K_0-\varrho\omega_{\alpha_1}});\ p+1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p\end{array}\right\}.$$

Setzen wir nun (8.174) in die aus (7.10) folgende, zu (8.169) analoge Darstellung der $G_k(x,\xi,\varrho)$ (k = 2,3,4) ein, so erhalten wir analog (8.170)-(8.172):

$$(8.175)\quad |G_2(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_2^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-1-k_{m-p+1}}}\,e^{-\xi\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})}\quad;(0\leq\xi\leq x\leq 1)$$

$$(8.176)\quad |G_3(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_3^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-p+k_n}}\,e^{(x-1)\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})};\quad (0\leq\xi\leq x\leq 1)$$

$$(8.177)\quad |G_4(x,\xi,\varrho)| \leq \frac{c_4^{(1)}}{\delta}\,\frac{1}{|\varrho|^{n-p}}\quad;\qquad (0\leq\xi\leq x\leq 1).$$

Die letzte Abschätzung ist richtig wegen $\Re(\varrho\omega_{\alpha_1})>0$ für $\varrho\in S_{2\varkappa}$, was bereits in (8.172) ausgenutzt wurde. Damit folgt die Behauptung (5.8) für s = t = 0. Der Fall n-m = 2ϰ +1 läßt sich ebenso behandeln.

Die Gültigkeit der Abschätzungen für die Ableitungen von $G(x,\xi,\varrho)$ in (5.8) ersieht man aus den Entwicklungen (8.121) und (8.156) und den zugehörigen Abschätzungen, da sich beim Differenzieren nach x oder ξ die Exponentialfaktoren (8.140)-(8.143) nicht ändern, jedoch die ϱ -Potenzen wegen (3.3) und (8.126) sich entsprechend erhöhen. Damit ist Satz 5.2 bewiesen.-

Beweis von Hilfssatz 5.1: Wegen der Eigenschaften 1) und 2) der Greenschen Funktion auf S.19 gilt die Darstellung:

$$(8.178) \qquad G(x,\xi,\lambda) = \frac{-\, y_k(x)\cdot \overline{z_k(\xi)}}{\lambda - \lambda_k} + G_k^0(x,\xi,\lambda) \quad ,$$

wobei $G_k^0(x,\xi,\lambda)$ in einer Umgebung des Eigenwertes λ_k regulär ist. Daraus folgt:

$$(8.179) \qquad \int_{K_j(\lambda)} G(x,\xi,\lambda)\, d\lambda = - \int_{K_j(\lambda)} \sum_{k=1}^{j} \frac{y_k(x)\cdot \overline{z_k(\xi)}}{\lambda - \lambda_k}\, d\lambda =$$

$$= - 2\pi i \sum_{k=1}^{j} y_k(x)\cdot \overline{z_k(\xi)} \quad ,$$

also:

$$(8.180) \qquad \sum_{k=1}^{j} \overline{z_k(\xi)}\cdot y_k(x) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{K_j(\lambda)} G(x,\xi,\lambda)\cdot d\lambda \quad .$$

Setzen wir jetzt (4.8) in (5.9) ein, beachten (8.180) und (2.11), so folgt die Behauptung (5.10).-

Beweis von Hilfssatz 5.2: Zuvor beweisen wir zwei weitere Hilfssätze für das Rand-Eigenwertproblem A_o:

Hilfssatz 8.5: $f(x)$ sei stetig auf $[0,1]$. Dann gilt mit $0 < \delta < 1$:

$$(8.181) \qquad 0 = \lim_{j\to\infty} \max_{0\le x\le 1-\delta} \left| \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{x+\delta}^{1} \varrho^{n-p} \cdot G(x,\xi,\varrho)\cdot f(\xi)\cdot d\xi \right| .$$

Beweis: Aus Satz 5.2 bzw. (8.170)-(8.172) und (8.167) folgt für $n-m=2$ ae:

$$(8.182) \qquad \left| G_k(x,\xi,\varrho) \right| \le K_{21}\cdot |\varrho|^{c}\cdot e^{-\delta\cdot \Re(\varrho\omega_{\alpha_1})} \quad ; \quad (k = 1,2,3,4)$$

$$\text{für} \quad 0 \le x \le \xi - \delta \le 1 - \delta \quad ; \quad \varrho \in S_{2\varkappa} .$$

mit Konstanten K_{21} und c. Wegen:

$$(8.183) \qquad \Re(\varrho\omega_{\alpha_1}) = |\varrho|\cdot \cos(\arg\varrho + \arg\omega_{\alpha_1}) > 0 \quad \text{für} \quad \varrho \in S_{2\varkappa}$$

folgt die Behauptung (8.181), wenn man (8.182) einsetzt:

$$\left| \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{x+\delta}^{1} \varrho^{n-p} \cdot G(x,\xi,\varrho)\cdot f(\xi)\cdot d\xi \right| \le$$

$$\leq K_{22}(1-\delta) \int_{K_j(\varrho)} |d\varrho| \cdot |\varrho|^{c+n-p-1} \; e^{-\delta \cdot \Re(\varrho\omega_{\alpha_1})} \leq \quad \text{(s.(8.186))}$$

$$\leq K_{22}(1-\delta)\, \frac{2\pi}{n-p}\, r^{c+n-p}\, e^{-r\cdot\delta\cdot\Delta_0} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \text{gleichmäßig in } [0,1-\delta],$$

mit einer Konstanten K_{22} und:

$$(8.184)\quad 0 < \Delta_0 \leq \cos(\arg\varrho + \arg\omega_{\alpha_1}) \qquad \text{für } \varrho \in S_{2\varkappa}.$$

Für $n-m = 2\varkappa+1$ verläuft der Beweis analog.-

Hilfssatz 8.6: $f(x)$ sei stetig auf $[0,1]$. Dann gilt:

$$(8.185)\quad 0 = \lim_{j\to\infty} \max_{0\leq x\leq 1} \left| \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_x^1 G(x,\xi,\varrho)\, f(\xi)\, d\xi \right|.$$

Beweis: Beachten wir:

$$(8.186)\quad \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{2\pi i}{n-p} \qquad \text{und (8.300)},$$

und setzen die Abschätzungen (8.167),(8.170)-(8.172) in (8.185) ein, so liest man die Konvergenz wegen (8.183) bereits an den ϱ-Potenzen ab; in (8.170) ist

$$(8.187)\quad k_{m-p+1} \leq n-m+p-1\,, \quad \text{also: } n-1-k_{m-p+1} \geq m-p \geq 2 \quad \text{(s.(2.49))}$$

zu beachten; lediglich in (8.172) argumentieren wir mit der konvergenzerzeugenden Eigenschaft des Faktors

$$e^{-r\cdot\Delta_0}\,;$$

(analog für $n-m = 2\varkappa+1$).-

Zu $f(x)$ existiert stets eine Funktion $\tilde{f}(x)$ aus dem Definitionsbereich des Operators M, d.h. $\tilde{f}(x) \in D_M$, mit:

$$(8.188)\qquad \tilde{f}(x) \equiv f(x) \quad \text{für } x \in [0,d_1].$$

Sei nun $x \in [0,d]$ mit:

$$(8.189)\qquad d+\delta = d_1 \quad (\delta>0), \quad \text{also: } 0 \leq x \leq d_1-\delta\,.$$

Aus den Eigenschaften von $\tilde{f}(x)$ und der Greenschen Funktion:

(8.190) $\qquad \tilde{f}(x) \in D_M \subset D_N \quad ;$

(8.191) $\quad G(x,\xi,\varrho) \in D_K \subset D_N$ bzgl. x; $m_x(G) = \varrho^{n-p} n_x(G)$; $(x \neq \xi)$

folgt die Umformung:

(8.192) $$\tilde{f}(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\varrho)\,(m(\tilde{f}) - \varrho^{n-p} n(\tilde{f}))\,d\xi \quad .$$

Berücksichtigen wir schließlich noch die aus (8.188) und Hilfssatz 8.5 sich ergebende Abschätzung:

(8.193) $$\int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^1 \varrho^{n-p} G(x,\xi,\varrho)\, n(\tilde{f}-f)\, d\xi =$$

$$= \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_{d_1}^1 \varrho^{n-p} G(x,\xi,\varrho)\, n(\tilde{f}-f)\, d\xi = o(1) \quad (j\to\infty),$$

so erhalten wir aus (5.10) und (8.188):

(8.194)

$$f(x) - s_j(x) = f(x) + \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^1 \varrho^{n-p} \cdot G(x,\xi,\varrho) \cdot n(f) \cdot d\xi =$$

$$= \tilde{f}(x) + \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^1 \varrho^{n-p} G(x,\xi,\varrho)\, n(\tilde{f})\, d\xi - \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \varrho^{n-p} G(x,\xi,\varrho)\, n(\tilde{f}-f)\, d\xi \underset{\uparrow\,(8.193)}{=} \tilde{f}(x) + \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^1 \varrho^{n-p} G(x,\xi,\varrho) \cdot$$

$$\cdot n(\tilde{f})\, d\xi + o(1) \underset{\uparrow\,(8.192)}{=} \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^1 G(x,\xi,\varrho)\, m(\tilde{f})\, d\xi + o(1) \underset{\uparrow\,(8.185),(8.188)}{=}$$

$$= \frac{n-p}{2\pi i} \int_{K_j(\varrho)} \frac{d\varrho}{\varrho} \int_0^x G(x,\xi,\varrho)\, m(f)\, d\xi + o(1) \quad (j\to\infty);\ x \in [0,d] \ .$$

Im Falle $d_1 = 1$, also $f(x) \equiv \tilde{f}(x)$ für $x \in [0,1]$, liest man aus (8.193) ab, daß der Hilfssatz 8.5 nicht benötigt wird und daß deshalb die Behauptung (5.11) für alle $x \in [0,1]$ folgt.-

Beweis von Hilfssatz 6.1: Anstelle des Operators M_o betrachten wir den verallgemeinerten Operator M_{x_o} in (6.75) mit $x_o \in [0,1]$. Sei $\{\overline{y}_1(x),\ldots,\overline{y}_n(x)\}$ ein Fundamentalsystem von $m(y) = 0$ und $W(t)$ die zugehörige Wronskideterminante analog (7.2); dann besitzt das Cauchysche Anfangswertproblem $M_{x_o} y = z$ bekanntlich die Greensche Funktion:

$$(8.195) \qquad K(x,t) = \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{vmatrix} \overline{y}_1(t) & \ldots\ldots & \overline{y}_n(t) \\ \overline{y}_1'(t) & \ldots\ldots & \overline{y}_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{y}_1^{(n-2)}(t) & \ldots\ldots & \overline{y}_n^{(n-2)}(t) \\ \overline{y}_1(x) & \ldots\ldots & \overline{y}_n(x) \end{vmatrix}$$

und die Lösung:

$$(8.196) \qquad y(x) = \int_{x_o}^{x} K(x,t) \cdot z(t)\, dt \quad ,$$

wenn wir die Stetigkeits- und Sprungeigenschaft fordern:

$$(8.197) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s K(x,t)_{/x=t+0} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s K(x,t)_{/x=t-0} = \begin{cases} 0 & \text{falls } s < n-1 \\ 1 & \text{falls } s = n-1 \end{cases}$$

Wir bilden mit (8.195) den Ausdruck $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q K(x,t)$ und entwickeln die $\overline{y}_i^{(q)}(x)$ um $x=t$; mit "Zwischenwerten" $\xi_{iq} \in [x,t]$ bzw. $[t,x]$ gilt:

$$(8.198) \qquad \overline{y}_i^{(q)}(x) = \overline{y}_i^{(q)}(t) + \overline{y}_i^{(q+1)}(t) \cdot \frac{x-t}{1!} + \ldots$$

$$\ldots + \overline{y}_i^{(n-1)}(t) \cdot \frac{(x-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} + \overline{y}_i^{(n)}(\xi_{iq}) \cdot \frac{(x-t)^{n-q}}{(n-q)!} .$$

Setzen wir dies in $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q K(x,t)$ ein, so erhalten wir für $q = 0,\ldots,n-1$:

$$(8.199) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q K(x,t) = \frac{(x-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} + R_q^o(x,t) \cdot \frac{(x-t)^{n-q}}{(n-q)!} \quad ;$$

mit:

$$(8.200) \qquad R_q^o(x,t) := \frac{1}{W(t)} \cdot \begin{vmatrix} \overline{y}_1(t) & \ldots\ldots & \overline{y}_n(t) \\ \overline{y}_1'(t) & \ldots\ldots & \overline{y}_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{y}_1^{(n-2)}(t) & \ldots\ldots & \overline{y}_n^{(n-2)}(t) \\ \overline{y}_1(\xi_{1q}) & \ldots\ldots & \overline{y}_n(\xi_{nq}) \end{vmatrix} .$$

$$(x \neq t)$$

Für $x \to t$ folgt aus (8.200):

$$R_q^0(t,t) = - f_1(t) \quad . \tag{8.201}$$

Damit ist klar, daß eine Konstante C_1 existiert, so daß

$$\left|R_q^0(x,t)\right| \leq C_1 \quad \text{für alle} \quad x,t \in [0,1] \; ; \quad q = 0,\ldots,n-1 \tag{8.202}$$

gilt. Aus (8.199) und (8.202) folgt die Behauptung.-

Beweis von Hilfssatz 6.2: Aus (6.22) und (6.25) ergibt sich für k=1:

$$Q_1(x,t) = \frac{(x-t)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} + R_p^1(x,t) + g_1(x)\left\{\frac{(x-t)^{n-p}}{(n-p)!} + R_{p-1}^1(x,t)\right\} + \ldots + g_p(x)\left\{\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + R_0^1(x,t)\right\} = \tag{8.203}$$

$$= \frac{(x-t)^{n-p-1}}{(n-p-1)!} + P_1(x,t) \quad , \quad \text{mit:}$$

$$\left|P_1(x,t)\right| \leq \frac{|x-t|^{n-p}}{(n-p)!}\left(C_1 + |g_1(x)|\cdot(1+C_1) + \ldots + |g_p(x)|(1+C_1)\right) \tag{8.204}$$

wegen:

$$\frac{|x-t|^w}{w!} \geq \frac{|x-t|^v}{v!} \quad \text{für alle} \quad v \geq w \; , \quad \text{da} \; |x-t| \leq 1 \; . \tag{8.205}$$

Also:

$$\left|P_1(x,t)\right| \leq K_{23}\cdot\frac{|x-t|^{n-p}}{(n-p)!} \quad , \quad \text{mit:} \tag{8.206}$$

$$K_{23} := (1+C_1)\cdot \max_{0 \leq x \leq 1}\left(1 + |g_1(x)| + \ldots + |g_p(x)|\right) - 1 \; . \tag{8.207}$$

Wir schreiben jetzt die Rekursionsformel (6.25) in der Form einer (k-1)-fachen Integration über Q_1 und setzen darin (8.203),(8.206) ein; anschließend integrieren wir unter Berücksichtigung der Formel:

$$\int_t^x \frac{(x-s)^{r_1}}{r_1!}\cdot\frac{(s-t)^{r_2}}{r_2!}\cdot ds = \frac{(x-t)^{r_1+r_2+1}}{(r_1+r_2+1)!} \quad . \tag{8.208}$$

Auf diese Weise erhalten wir:

$$(8.209)\qquad Q_h(x,t) = \frac{(x-t)^{h(n-p)-1}}{(h(n-p)-1)!} + P_h(x,t) \quad , \qquad \text{mit:}$$

$$(8.210)\qquad |P_h(x,t)| \leq \binom{h}{1}K_{23}\frac{|x-t|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} + \ldots + \binom{h}{h}K_{23}^{h}\frac{|x-t|^{h(n-p)+h-1}}{(h(n-p)+h-1)!}$$

$$= \frac{|x-t|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!}\left(\binom{h}{1}K_{23} + \ldots + \binom{h}{h}K_{23}^{h}|x-t|^{h-1}\cdot\frac{(h(n-p))!}{(h(n-p)+h-1)!}\right)$$

Die Summanden in (8.210) schätzen wir wie folgt ab:

$$(8.211)\qquad \binom{h}{i}K_{23}^{i}|x-t|^{i-1}\cdot\frac{(h(n-p))!}{(h(n-p)+i-1)!} = \frac{h!}{i!\,(h-i)!}\,\frac{(h(n-p))!}{(h(n-p)+i-1)!}\cdot$$

$$\cdot K_{23}^{i}|x-t|^{i-1} \leq K_{23}\frac{K_{23}^{i-1}\cdot|x-t|^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\begin{cases}\dfrac{h\cdot\cdots\cdot(h-i+1)}{(h(n-p)+i-1)\cdot\cdots\cdot(h(n-p)+1)} & \text{für } i = 2,\ldots,h\\ h & \text{für } i = 1\end{cases}$$

$$\leq K_{23}\frac{K_{23}^{i-1}\cdot|x-t|^{i-1}}{(i-1)!}\cdot\begin{cases}\left(\frac{1}{n-p}\right)^{i-1}\cdot h & \text{für } i = 2,\ldots,h\\ h & \text{für } i = 1\end{cases}$$

Also ergibt sich:

$$(8.212)\qquad |P_h(x,t)| \leq \frac{|x-t|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!}\cdot\sum_{i=1}^{h}K_{23}\cdot\left(\frac{K_{23}}{n-p}\right)^{i-1}\cdot\frac{|x-t|^{i-1}}{(i-1)!}\cdot h \leq$$

$$\leq \frac{|x-t|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!}\cdot h\cdot C_2^{o} \leq C_2^{o}\cdot|x-t|^{h(n-p)} \quad ;$$

mit:

$$(8.213)\qquad C_2^{o} := K_{23}\cdot e^{\left(\frac{K_{23}}{n-p}\right)} \quad .$$

Aus (8.209) und (8.212) folgt:

$$|Q_h(x,t)| \leq \frac{|x-t|^{h(n-p)-1}}{(h(n-p)-1)!}\left(1 + C_2^{o}|x-t|\frac{h\cdot(h(n-p)-1)!}{(h(n-p))!}\right) \leq$$

$$\leq C_2^1 \frac{|x-t|^{h(n-p)-1}}{(h(n-p)-1)!} \quad , \qquad \text{mit:}$$

$$C_2^1 := 1 + C_2^0 \frac{1}{n-p} \quad . \tag{8.214}$$

Anstelle des Operators M_{x_o} betrachten wir nun den Operator M_{x_o} in (6.75). Der Kern $Q_h(x,t)$ des "Integraloperators" $(n M_{x_o}^{-1})^h$ ist bekanntlich gegeben durch (6.25), so daß gilt:

$$(n M_{x_o}^{-1})^h y(x) = \int_{x_o}^{x} Q_h(x,t)\, y(t)\, dt \quad , \tag{8.215}$$

denn $K(x,t)$ mit (8.195),(8.196) ist die Greensche Funktion von M_{x_o}. Damit ist Hilfssatz 6.2 bewiesen.-

Beweis von Satz 6.1: Aus (6.21),(8.196) und (8.215) folgt für $q=0,\ldots,n-1$; $l=p,\ldots,n-1$; $h = 1,2,3,\ldots$:

$$\tilde{f}^{(q)}_{h(n-p)+l}(x,0) = \int_o^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q K(x,t) \cdot \int_o^t Q_{h-1}(t,s) \cdot \tilde{N}\, \tilde{f}_l(s,0)\, ds\, dt, \tag{8.216}$$

wenn wir die Stetigkeitseigenschaften in (8.197) hinzuziehen. Die Abschätzung (6.27) ist wegen (6.28) sicher richtig; also gilt:

$$\left|\tilde{N}\, \tilde{f}_l(x,0)\right| \leq K_{24} \qquad \text{für alle } x \in [0,1] \quad , \tag{8.217}$$

mit einer Konstanten K_{24}. Durch Verwendung der Abschätzungen (6.24),(8.217) und (6.22) folgt aus (8.216):

$$\left|\tilde{f}^{(q)}_{h(n-p)+l}(x,0)\right| \leq K_{24} \int_o^x (1+C_1) \frac{(x-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \int_o^t C_2^1 \cdot \frac{(t-s)^{(h-1)(n-p)-1}}{((h-1)(n-p)-1)!}\, ds\, dt$$

$$= C_{o1} \int_o^x \frac{(x-t)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} \cdot \frac{t^{(h-1)(n-p)}}{((h-1)(n-p))!}\, dt = \tag{8.218}$$

$$= C_{o1} \cdot \frac{x^{h(n-p)+p-q}}{(h(n-p)+p-q)!} \qquad \text{für alle } x \in [0,1] \quad ,$$

mit:

$$C_{o1} := K_{24} \cdot C_2^1 \cdot (1 + C_1) \quad .- \tag{8.219}$$

Beweis von Satz 6.2: Aus der Taylorformel (6.37) und den Definitionen (6.35),(6.36) erhalten wir über (6.30) folgende Anfangsbedingungen in $x = 0$ für das Taylorsche Restglied $\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0)$:

(8.220) $$D^{i_\tau-p+1}(\tilde{N}^{-1}m)^{\varkappa}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0)_{/x=0} = 0 \quad \text{für} \begin{cases} \varkappa=0,\dots,q-1 \\ \tau=p,\dots,n-1 \end{cases}$$

(8.221) $$D^{i_\tau-p+1}(\tilde{N}^{-1}m)^{q}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0)_{/x=0} = 0 \quad \text{für } \tau=p,\dots,r\ .$$

Berücksichtigen wir noch (6.9),(6.17) und die Voraussetzung $f(x) \in D_{\tilde{N}}$, so folgt ebenfalls aus (6.37) für das Restglied:

(8.222) $$(\tilde{N}^{-1}m)^{\varkappa}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0) \in D_{\tilde{N}} \quad \text{für} \quad \varkappa = 0,\dots,q.$$

Durch Anwendung des Operators $D^{i_{r-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^{q}$ auf die Gleichung (6.37) und Einsetzen von (6.38) ergibt sich:

(8.223) $$D^{i_{r-p+1}}(\tilde{N}^{-1}m)^{q}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0) = \tilde{h}_{q(n-p)+r}(x,0).$$

Die Matrix J in (6.5)-(6.8) schreiben wir nun in der Form:

(8.224) $$J = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix},$$

so daß aus (6.4) und (6.5) folgt:

(8.225) $$\begin{pmatrix} U \\ J_2 \end{pmatrix}\tilde{F}_1(0,0) = \begin{pmatrix} \Omega \\ E_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion der Matrix J gilt:

(8.226) $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} U \\ J_2 \end{pmatrix} = n \quad ,$$

d.h. die in (8.222) und (8.220) bzw. (8.221) enthaltenen Randbedingungen sind linear unabhängig. Daraus folgt sofort:

(8.227) $$(\tilde{N}^{-1}m)^{\varkappa}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0) \in D_{M_o} \quad \text{für } \varkappa = 0,\dots,q-1\ ,$$

und

(8.228) $$D^{\tau}(\tilde{N}^{-1}m)^{q}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0)_{/x=0} = 0 \text{ für } \tau=0,..,i_{r-p+1}$$

Sei:

(8.229) $$\tilde{D}^{i_{r-p+1}}y: \left\{ \begin{array}{l} D^{i_{r-p+1}}(y) \\ \\ y(0) = \dots = y^{(i_{r-p+1}-1)}(0) = 0 \end{array} \right\} .$$

Mit (8.227)-(8.229) können wir dann (8.223) schreiben in der Form:

(8.230) $$\tilde{D}^{i_{r-p+1}}(\tilde{N}^{-1}M_o)^{q}\,\tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0) = \tilde{h}_{q(n-p)+r}(x,0)\ .$$

Neben M_o ist auch der Operator $\tilde{D}^{i_{r-p+1}}$ invertierbar; wir bezeichnen sein Inverses mit

$$\tilde{D}^{-i_{r-p+1}} .$$

Dieser Integraloperator besitzt bekanntlich den Kern:

$$(8.231) \qquad \tilde{T}_r(x,t) := \frac{(x-t)^{i_{r-p+1}-1}}{(i_{r-p+1}-1)!} \qquad \text{für} \quad t \in [0,x] .$$

Also existiert eine eindeutige Lösung der Gleichung (8.230):

$$(8.232) \quad \tilde{R}_{q(n-p)+r}(x,0) = (M_o^{-1}\tilde{N})^q \, \tilde{D}^{-i_{r-p+1}} \, \tilde{h}_{q(n-p)+r}(x,0) =$$

$$= \int_o^x K(x,t) \int_o^t Q_{q-1}(t,s) \, \tilde{N}_s \int_o^s \tilde{T}_r(s,u) \cdot \tilde{h}_{q(n-p)+r}(u,0) \, du \, ds \, dt ,$$

wobei wir wiederum (8.196) und (8.215) für $x_o = 0$ angewandt haben. Aus:

$$(8.233) \quad \left(\frac{d}{ds}\right)^v \int_o^s \frac{(s-u)^{i_{r-p+1}-1}}{(i_{r-p+1}-1)!} \cdot \tilde{h}_{q(n-p)+r}(u,0) \, du =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_o^s \frac{(s-u)^{i_{r-p+1}-1-v}}{(i_{r-p+1}-1-v)!} \cdot \tilde{h}_{q(n-p)+r}(u,0) \cdot du & \text{für } v \leq i_{r-p+1}-1 \\ \left(\frac{d}{ds}\right)^{v-i_{r-p+1}} \tilde{h}_{q(n-p)+r}(s,0) & \text{für } v \geq i_{r-p+1} \end{cases}$$

schließen wir:

$$(8.234) \qquad \left| \tilde{N}_s \int_o^s \tilde{T}_r(s,u) \, \tilde{h}_{q(n-p)+r}(u,0) \, du \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} H_o \cdot \max\limits_{0\leq u\leq s} \left|\tilde{h}_{q(n-p)+r}(u,0)\right| + \displaystyle\sum_{w=0}^{p-i_{r-p+1}} H_{ow} \left|\left(\frac{d}{ds}\right)^w \tilde{h}_{q(n-p)+r}(s,0)\right| \\ \qquad \text{für} \quad i_{r-p+1} \leq p ; \\ K_{25} \cdot \dfrac{s^{i_{r-p+1}-p}}{(i_{r-p+1}-p)!} \cdot \max\limits_{0\leq u\leq s} \left|\tilde{h}_{q(n-p)+r}(u,0)\right| \quad \text{für} \quad i_{r-p+1} \geq p \end{cases} ;$$

mit Konstanten H_o, H_{ow}, K_{25} für alle $s \in [0,1]$, unabhängig von q,r.

Durch Einsetzen dieser und der Abschätzungen (6.22),(6.24) in (8.232) und Anwenden der Formel (8.208) folgt die Behauptung (6.39). Im Falle q = 0 tritt an Stelle von (8.232) die Gleichung:

$$\tilde{R}_r(x,0) = \tilde{D}^{-i_{r-p+1}} \tilde{h}_r(x,0) \quad ; \tag{8.235}$$

sie wird analog behandelt.-

Beweis von Satz 6.3: 1), 2) Die Stirlingschen Formel liefert:

$$e \cdot \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu|} = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{\frac{|\tilde{a}_\mu|}{\mu!}} \quad . \tag{8.236}$$

Wegen $C_o > 0$ und (6.42) ergibt sich: $\tilde{R} \geq C_o^{-1} > 0$. Sei jetzt

$$B > \tilde{R}^{-1} + \varepsilon \; ; \; \varepsilon > 0 \qquad \text{gewählt.} \tag{8.237}$$

Falls alle Aussagen des Satzes 6.3 bewiesen werden für ein Intervall

$$[0,\delta_o\} := [0,B^{-1}) \cap [0,1] \subset [0,\delta\} \; ; \tag{8.238}$$

so sind sie auch richtig für das Intervall $[0,\delta\}$. Da $\tilde{R}^{-1}$ durch den größten Häufungspunkt bestimmt wird, gilt:

$$B - \varepsilon \geq \frac{e}{\mu} \sqrt[\mu]{|\tilde{a}_\mu|} \text{ für } \mu \geq \mu_1 \text{ , wegen } B - \varepsilon > \tilde{R}^{-1}, \tag{8.239}$$

und (6.45), und deshalb:

$$|\tilde{a}_\mu| \leq (B - \varepsilon)^\mu \cdot \left(\frac{\mu}{e}\right)^\mu \quad \text{für} \quad \mu \geq \mu_1 \quad . \tag{8.240}$$

Aus:

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{1}{\mu} \sqrt[\mu]{\mu!} = \frac{1}{e}$$

folgt nun aber:

$$\frac{e}{\mu} \sqrt[\mu]{\mu!} > 1 - \frac{\varepsilon}{B} = \frac{B - \varepsilon}{B} \quad \text{, für } \mu \geq \mu_2 \text{ ,} \tag{8.241}$$

so daß wir mit (8.240) und (8.241) schließen können:

$$|\tilde{a}_\mu| \leq B^\mu \cdot \mu! \quad \text{für } \mu \geq \mu_3 \text{ .} \tag{8.242}$$

Wir wenden uns nun den Reihen in (6.46) zu; zunächst notieren wir die Umformung die sich aus (6.18) ergibt:

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot D^r (\tilde{N}^{-1} m)^q \tilde{f}_\mu(x,0) = \sum_{\mu=q(n-p)+p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \cdot D^r \tilde{f}_{\mu-q(n-p)}(x,0) \; . \tag{8.243}$$

Sei $q \geq q_o := \max\left(1, \frac{\mu_3+1}{n-p}\right)$. Dann dürfen die Abschätzungen (6.26) und (8.242) auf die Summanden in (8.243) mit $\mu \geq (q+2)(n-p)+p$ angewandt werden:

$$(8.244)\quad \left| \sum_{\mu=(q+2)(n-p)+p}^{\infty} \tilde{a}_\mu D^r \tilde{f}_{\mu-q(n-p)}(x,0) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mu=(q+2)(n-p)+p}^{\infty} B^{(q+2)(n-p)+p} \cdot B^{\mu-(q+2)(n-p)-p} \cdot \mu!\, C_{o1} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^{\mu-(q+2)(n-p)-p}}{(\mu-(q+2)(n-p)-p)!} = C_{o1} \cdot B^{(q+2)(n-p)+p} \cdot \left(\frac{d}{d(Bx)}\right)^{(q+2)(n-p)+p} \sum_{\mu=0}^{\infty} (Bx)^\mu =$$

$$= C_{o1} \cdot B^{(q+2)(n-p)+p} \cdot \frac{((q+2)(n-p)+p)!}{(1-Bx)^{(q+2)(n-p)+p+1}} .$$

Die Abschätzung in (8.244) beruht auf der Abschätzung:

$$\frac{x^{\mu-q(n-p)+p-r-1}}{(\mu-q(n-p)+p-r-1)!} \leq \frac{x^{\mu-q(n-p)+p-2n}}{(\mu-q(n-p)+p-2n)!} = \frac{x^{\mu-(q+2)(n-p)-p}}{(\mu-(q+2)(n-p)-p)!} ;$$

mit $\mu = h(n-p)+1$; $p \leq 1 \leq n-1$; $0 \leq r \leq n-1$.

Anschließend haben wir die Eigenschaften:

$$(8.245)\quad \sum_{\nu=s}^{\infty} \xi^{\nu-s} \cdot \frac{\nu!}{(\nu-s)!} = \left(\frac{d}{d\xi}\right)^s \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi^\nu = \frac{s!}{(1-\xi)^{s+1}}$$

der geometrischen Reihe ausgenutzt. Wir lesen aus (8.244) ab, daß die Reihe (6.46) für $q \geq q_o$ absolut und gleichmäßig konvergiert auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[0,d_o] \subset [0,\delta_o\}$ (s.(8.238)). Sei $q_o > 1$; dann gilt für $q = q_o - 1$:

$$\sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu D^r (\tilde{N}^{-1} m)^{q_o-1} \tilde{f}_\mu(x,0) = \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu D^r M_o^{-1} \tilde{N} (\tilde{N}^{-1} m)^{q_o} \tilde{f}_\mu(x,0) +$$

$$+ \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(q_o-1)(n-p)+l} D^r \tilde{f}_l(x,0) =$$

$$= \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r K(x,t)\, \tilde{N}(\tilde{N}^{-1}m)^{q_o} \tilde{f}_\mu(t,0)\,dt + \sum_{l=p}^{n-1} \ldots =$$

$$= \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r K(x,t) \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \tilde{N}(\tilde{N}^{-1}m)^{q_o} \tilde{f}_\mu(t,0)\,dt + \sum_{l=p}^{n-1} \ldots$$

Damit haben wir die Konvergenz der Reihe (6.46) für $q = q_o - 1$ auf die Konvergenz der Reihe (6.46) für $q = q_o$ zurückgeführt; dies Verfahren läßt sich fortsetzen, bis man nach q_o Schritten die absolute und gleichmäßige Konvergenz aller Reihen (6.46) erhält. Mit demselben Verfahren (erlaubte Vertauschung von Summation und Differentiation wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihen (6.46)) können wir (6.47) nachweisen:

$$D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \tilde{f}_\mu(x,0) = D^r \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu (\tilde{N}^{-1}m)^q \tilde{f}_\mu(x,0) =$$

$$= D^r \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu M_o^{-1} \tilde{N}(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1} \tilde{f}_\mu(x,0) + \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{q(n-p)+l} D^r \tilde{f}_l(x,0) =$$

$$= D^r \int_0^x K(x,t) \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \tilde{N}(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1} \tilde{f}_\mu(t,0)dt + \sum_{l=p}^{n-1} \ldots =$$

$$= \int_0^x \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^r K(x,t) \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu \tilde{N}(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1} \tilde{f}_\mu(t,0)dt + \sum_{l=p}^{n-1} \ldots =$$

$$= \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu D^r M_o^{-1} \tilde{N}(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1} \tilde{f}_\mu(x,0) + \sum_{l=p}^{n-1} \ldots =$$

$$= \sum_{\mu=p}^{\infty} \tilde{a}_\mu D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q \tilde{f}_\mu(x,0) \quad ,$$

wobei die gleichmäßige Konvergenz der Reihen (6.46) ausgenutzt wird.

Der Konvergenzradius (6.45) ergibt sich mit Hilfe der Abschätzung (6.26) aus dem Wurzelkriterium.

3) Die Behauptung folgt unmittelbar aus (6.47) und Hilfssatz 6.3 für $r = i_{l-p+1}$ bzw. $j = l-p+1$.

4) Zum Beweis dieser Aussage, d.h. einer Abschätzung der Art (6.41), betrachten wir (6.47): aus (8.244) folgt die Existenz einer von x,q,r unabhängigen Konstanten K_{26}, so daß für $q \geq q_o$

und damit für alle $q = 0,1,2,\ldots$ folgt: für $x \in [0,\delta_0\}$ gilt:

$$(8.246)\qquad \left| \sum_{\mu=(q+2)(n-p)+p}^{\infty} \tilde{a}_\mu D^r \tilde{f}_{\mu-q(n-p)}(x,0) \right| \leq K_{26}^{q(n-p)+p} (q(n-p)+p)!$$

wenn man neben (8.108) noch die Existenz einer Konstanten K_{29}:

$$(8.247)\qquad K_{27} \cdot K_{28}^{s} \leq K_{29}^{s} \qquad (s = 1,2,3,\ldots)$$

beachtet. Für die Restsumme in (8.243) schließen wir aus Satz 6.1:

$$\left| \sum_{\mu=q(n-p)+p}^{(q+2)(n-p)+p-1} \tilde{a}_\mu D^r \tilde{f}_{\mu-q(n-p)}(x,0) \right| = \left| \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{q(n-p)+l} D^r \tilde{f}_l(x,0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=p}^{n-1} \tilde{a}_{(q+1)(n-p)+l} \tilde{f}_{n-p+l}^{(r)}(x,0) \right| \leq (n-p) B^{q(n-p)+n-1} (q(n-p)+n-1)! C_{02} +$$

$$+ (n-p) B^{(q+1)(n-p)+n-1} ((q+1)(n-p)+n-1)!\, C_{01} \frac{x^{n-r}}{(n-r)!} \leq \quad [1]$$

$$= K_{30}^{q(n-p)+n-1} (q(n-p)+n-1)! \quad \text{für } x \in [0,1] \text{ und } q \geq q_0 .$$

Damit ist eine derartige Abschätzung für alle $q = 0,1,2,\ldots$ gesichert; mit Hilfe von (8.108) und (8.247) folgt schließlich über (6.47) die Existenz einer Konstanten $\tilde{C}$ gemäß (6.41) für $x \in [0,\delta_0\}$.
5) (6.9) und (6.17) haben (6.49) zur Folge, so daß Satz 6.3 vollständig bewiesen ist.-

Beweis von Satz 6.9: Wir betrachten $f_1(x) - f_2(x)$, die wiederum $N_{x_0}^{-1}m$ - analytische Funktion ist. Also können wir o.B.d.A. $f_2(x) \equiv$ $\equiv 0$ setzen und müssen $f_1(x) \equiv 0$ nachweisen; und zwar ist es hinreichend zu zeigen, daß $f_1(x) \equiv 0$ auf einem beliebigen Intervall (α,β) mit $[\alpha,\beta] \subset \{\alpha_0,\beta_0\}$ gilt. Da $f_1(x)$ nach Voraussetzung $N_{x_0}^{-1}m$ - analytisch auf $\{\alpha_0,\beta_0\}$ ist , existiert eine Konstante C, so daß gilt:

$$(8.248)\qquad \left| D^r (N_{x_0}^{-1}m)^q f_1(x) \right| \leq C^{q(n-p)+r} (q(n-p)+r)!$$

$$\text{für } x \in [\alpha,\beta] \; ; \; C = C(\alpha,\beta,f_1); \; q \geq 0, \; r = 0,\ldots,n-1.$$

Sei $x_0^* \in \{a,b\}$ in der Aussage 1), $x_0^* \in \{\alpha_0,\beta_0\}$ in der Aussage 2), [2] oder sei x_0^* Häufungspunkt mit $x_0^* \in \{\alpha_0,\beta_0\}$ in der Aussage 3); wir können stets voraussetzen: $x_0^* \in (\alpha,\beta)$. Nach Satz 6.8 und (6.113) läßt sich $f_1(x)$ in eine verallgemeinerte Taylorreihe um $x=x_0^*$ ent-

[1]) O.B.d.A. sei $B \geq 1$.

[2]) $q=r=0$ ausgenommen.

wickeln:

$$(8.249)\qquad f_1(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a^{\circ}_{\mu} \cdot f_{\mu}(x,x_0^*) \quad \text{für} \quad x \in \Delta(x_0^*) \cap (\alpha,\beta) \; ;$$

$$(8.250)\qquad a^{\circ}_{\mu} = D^1(N^{-1}_{x_0^*}m)^h \, f_1(x)_{/x=x_0^*} \; .$$

Aus den Bedingungen 1) und 2) folgt sofort mit (8.250):

$$(8.251)\qquad a^{\circ}_{\mu} = 0 \quad \text{für alle} \quad \mu = 0,1,2,\ldots$$

Auch aus der Bedingung 3) folgt (8.251), was wir jetzt beweisen werden:
Wegen (6.81) und (6.65) bzw. (6.79) gilt:

$$(8.252)\qquad h_{q(n-p)+r}(x,x_0)_{/x=x_0} = 0 \; .$$

Außerdem sind nach (6.81) $h_{q(n-p)+r}(x,x_0)$ und $\frac{\partial}{\partial x} h_{q(n-p)+r}(x,x_0)$ stetig in x für alle $x \in \{\alpha_0,\beta_0\}$, und deshalb gilt für alle $q = 0,1,2,\ldots;\ r = 0,\ldots,n-1$:

$$(8.253)\qquad \left|h_{q(n-p)+r}(x,x_0)\right| \le K_{31} \cdot |x-x_0| \quad \text{für} \quad x \in [\alpha,\beta] \; .$$

Damit folgt aus (6.89) durch Einsetzen von (6.22),(6.24) und (8.253) unter Berücksichtigung von (8.208) die im Vergleich zu (6.83) bessere Abschätzung:

$$(8.254)\qquad \left|R^{(k)}_{q(n-p)+r}(x,x_0)\right| \le K_{32} \cdot \frac{|x-x_0|^{q(n-p)+r+1-k}}{(q(n-p)+r+1-k)!} \qquad ^{1})$$

für $x \in [\alpha,\beta]$; $q \ge 0$, $r = p,\ldots,n-1, 0 \le k \le p-1$,
mit einer von x,x_0,r,q unabhängigen Konstanten $K_{32} = K_{32}(\alpha,\beta,f_1)$.
Analog zu (6.80) definieren wir ein Restglied bezüglich $f_1(x)$:

$$(8.255)\qquad f_1(x) = \sum_{h=1}^{q}\sum_{l=p}^{n-1} a^{\circ}_{h(n-p)+l} f_{h(n-p)+l}(x,x_0) + \sum_{l=0}^{n-1} a^{\circ}_{l} f_l(x,x_0) +$$

$$+ \sum_{l=p}^{r} a^{\circ}_{(q+1)(n-p)+l} f_{(q+1)(n-p)+l}(x,x_0) + \overline{R}_{(q+1)(n-p)+r}(x,x_0) \; .$$

Wegen (6.108) folgt aus (6.80) und (8.255):

$$(8.256)\qquad \overline{R}_{(q+1)(n-p)+r}(x,x_0) = M^{-1}_{x_0} n(R_{q(n-p)+r})(x,x_0) \; .$$

---

[1]) Die Gültigkeit für $k \ge 1$ folgt aus (6.89) und (6.22).

Nun wenden wir die Abschätzungen (8.254) und (6.22) an:

$$(8.257)\qquad \left|\overline{R}_{q(n-p)+r}(x,x_o)\right| \le K_{33}\cdot\frac{|x-x_o|^{q(n-p)+r+1}}{(q(n-p)+r+1)!}$$

für $x\in[\alpha,\beta]$; $q\ge 1$: $r=p,\dots,n-1$; $q=0$: $r=0,\dots,n-1$; mit einer Konstanten $K_{33}=K_{33}(\alpha,\beta,f_1)$. Für $q=0$ definieren wir analog zu (8.255):

$$(8.258)\qquad \overline{R}_r(x,x_o) := f_1(x) - \sum_{l=0}^{r} a_l^o f_l(x,x_o) \quad \text{für} \quad r=0,\dots,n-1 .$$

Wegen (6.114) ist $R_r(x,x_o)\in \tilde{D}_{x_o}^{r+1}$ (s.(6.87)), so daß die Abschätzung (8.257) auch für $q=0$ richtig ist. Für $r=n-1$ und $q=0$ setzen wir (6.73) in (8.258) ein:

$$(8.259)\qquad f_1(x)=\sum_{l=0}^{n-1} a_l^o f_l(x,x_o)+\overline{R}_{n-1}(x,x_o)=\sum_{l=0}^{n-1} a_l^o\frac{(x-x_o)^l}{l!}+\beta(x,x_o)$$

mit:

$$(8.260)\qquad \left|\beta(x,x_o)\right| \le K_{34}\cdot|x-x_o|^n \quad \text{für} \quad x\in[\alpha,\beta] .$$

Für $x_o=x_o^*$ und $x=x_i$ mit $x_i\xrightarrow[i\to\infty]{} x_o^*$, $f_1(x_i)=0$, gilt also:

$$(8.261)\qquad \sum_{l=0}^{n-1} a_l^o\cdot\frac{(x_i-x_o^*)^l}{l!}=O(|x_i-x_o^*|^n) \qquad (i\to\infty) .$$

Schritt für Schritt folgt daraus: $a_o^o=\dots=a_{n-1}^o=0$. Wir beweisen die Aussage (8.251) mit Hilfe vollständiger Induktion nach μ : sei also $a_\mu^o=0$ bewiesen für $\mu=0,\dots,q(n-p)+n-1$. Die Taylorformel (8.255) lautet dann für $r=n-1$:

$$(8.262)\qquad f_1(x)=\sum_{l=p}^{n-1} a^o_{(q+1)(n-p)+l} f^{(q+1)(n-p)+l}(x,x_o)+$$

$$+\overline{R}_{(q+1)(n-p)+n-1}(x,x_o) .$$

Wir benötigen nun eine Abschätzung der $f^{(q+1)(n-p)+l}(x,x_o)$, die schärfer ist als die in (6.70). Dazu setzen wir in (6.69) die Ausdrücke (6.22),(6.23) und (6.74) ein:

$$(8.263)\qquad f^{(q+1)(n-p)+l}(x,x_o)=\frac{(x-x_o)^{(q+1)(n-p)+l}}{((q+1)(n-p)+l)!}+\gamma_{q+1,l}(x,x_o)$$

mit:

$$(8.264)\qquad \left|\gamma_{q+1,l}(x,x_o)\right| \le K_{34}\,|x-x_o|^{(q+1)(n-p)+l+1}$$

für alle $x\in[\alpha,\beta]$; $q\ge 0$, $l=p,\dots,n-1$;

mit einer Konstanten $K_{34} = K_{34}(\alpha,\beta,f_1)$. [1]) Für $x_o = x_o^*$ und $x = x_i$ folgt schließlich aus (8.262) und (8.257):

$$(8.265)\quad \sum_{l=p}^{n-1} a^o_{(q+1)(n-p)+l} \frac{(x_i-x_o^*)^{(q+1)(n-p)+l}}{((q+1)(n-p)+l)!} +$$

$$+ \sum_{l=p}^{n-1} a^o_{(q+1)(n-p)+l} \gamma_{q+1,l}(x_i,x_o^*) = O(|x_i-x_o^*|^{(q+1)(n-p)+n})$$

Daraus erhalten wir Schritt für Schritt die Induktionsbehauptung $a^o_{(q+1)(n-p)+p} = \cdots = a^o_{(q+1)(n-p)+n-1} = 0$, womit wir auch für die Bedingung 3) die Aussage (8.251) nachgewiesen haben.

Wir kehren damit zurück zur Entwicklung (8.249). Falls $\Delta(x_o^*) \subset (\alpha,\beta)$ ist, so wird nach (6.111) die Intervallänge von $\Delta(x_o^*)$ unabhängig von x_o^* nur von der Konstanten C in der Abschätzung (8.248) bestimmt. Sei nun $\Delta(x_o^*) \subset_{\text{echt}} (\alpha,\beta)$; dann sei:

$$(8.266)\quad x_o^{**} := x_o^* + \frac{1}{4C} .$$

Damit ist x_o^{**} innerer Punkt des Intervalls $\Delta(x_o^*) \cap (\alpha,\beta)$, indem wegen (8.249)-(8.251) gilt:

$$(8.267)\quad f_1(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \Delta(x_o^*) \cap (\alpha,\beta) .$$

Wir gehen nun von x_o^* zu x_o^{**} über, d.h. wir entwickeln nach Satz 6.8 und (6.113) $f_1(x)$ um $x = x_o^{**}$ und erhalten somit analog zu (8.249)-(8.251):

$$(8.268)\quad f_1(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a^o_\mu \cdot f_\mu(x,x_o^{**}) \quad \text{für} \quad x \in \Delta(x_o^{**}) \cap (\alpha,\beta) .$$

mit:

$$(8.269)\quad a^o_\mu := D^1(N^{-1}_{x_o^{**}} m)^h f_1(x)\,/_{x=x_o^{**}} .$$

Setzen wir (8.267) in (8.269) ein, so bekommen wir wiederum die Aussage (8.250):

$$(8.270)\quad a^o_\mu = 0 \quad \text{für alle} \quad \mu = 0,1,2,\ldots\ldots ,$$

und daraus wegen (8.268):

$$(8.271)\quad f_1(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \Delta(x_o^{**}) \cap (\alpha,\beta).$$

---

[1]) Die Abschätzungen zu (8.263),(8.264) sind recht umfangreich. Im wesentlichen werden (8.208) und $|x-x_o| \leq 1$ benutzt.

Zusammenfassend folgt aus (8.267) und (8.271):

$$(8.272)\quad f_1(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in \Delta(x_o^*) \cup \Delta(x_o^{**}) \cap (\alpha,\beta) = (x_o^* - \tfrac{1}{2C}, x_o^* + \tfrac{3}{4C}) \cap (\alpha,\beta) \ .$$

(analog für $x_o^{**} := x_o^* - \frac{1}{4C}$).

Durch endlich viele Wiederholungen des Schrittes von (8.267) auf (8.271) erhalten wir:

$$(8.273)\qquad f_1(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \in (\alpha,\beta) \ ,$$

und daraus folgt die Behauptung des Satzes 6.9.-

Beweis von Hilfssatz 6.5: Wir definieren:

$$(8.274)\qquad G_j(x,x_o) := (N_{x_o}^{-1} m)^j f(x) - (N_{x_o^*}^{-1} m)^j f(x)$$

mit:

$$(8.275)\qquad f(x) := f(x,x_o^*) \ ,$$

und:

$$(8.276)\qquad H_j(x,x_o) := N_{x_o}^{-1} m (N_{x_o^*}^{-1} m)^{j-1} f(x) - (N_{x_o^*}^{-1} m)^j f(x) \ .$$

$$(8.277)\qquad = G_j(x,x_o) - N_{x_o}^{-1} m (G_{j-1})(x,x_o) \ .$$

Offenbar gilt stets:

$$(8.278)\qquad n(H_j) = 0 \qquad (j = 1,2,3,\ldots) \ .$$

Durch Auflösen der Rekursionsformel (8.277) nach $G_j(x,x_o)$ erhalten wir:

$$(8.279)\qquad G_j(x,x_o) = \sum_{i=1}^{j} (N_{x_o}^{-1} m)^{j-i} H_i(x,x_o) \ .$$

Nun setzen wir (8.275),(6.120) in (8.276) ein

$$(8.280)\qquad H_j(x,x_o) = N_{x_o}^{-1} m (N_{x_o^*}^{-1} m)^{j-1} f(x,x_o^*) - (N_{x_o^*}^{-1} m)^j f(x,x_o^*)$$

und schätzen mit Hilfe von (6.121) ab:

$$(8.281)\quad |H_j(x,x_o)| \le K_{35}^{j(n-p)} \cdot (j(n-p))! \quad \text{für alle } x,x_o \in [c_{x_o^*}, d_{x_o^*}]$$

und $j \ge 1$, mit einer Konstanten $K_{35} = K_{35}(c_{x_o^*}, d_{x_o^*}, f)$, unabhängig von x, x_o, j !

Weiterhin ist wegen (8.278) und der Voraussetzung (2.51) folgende Abschätzung richtig, da sich jedes H_j als Linearkombination der h_i des Fundamentalsystems $\{h_1(x),\ldots,h_p(x)\}$ von $n(y)=0$ darstellen

läßt:

$$(8.282)\qquad \left|D^r(N_{x_o}^{-1}m)^{q-j}H_j(x,x_o)\right| \leq K_{36}^{(q-j)(n-p)+r}K_{37}\,((q-j)(n-p)+r)!$$

für alle $x,x_o \in [0,1]$; $q-j \geq 0$, $r = 0,\ldots,n-1$, mit Konstanten $K_{36} = K_{36}(j)$, K_{37} unabhängig von x,x_o,r,q,j.

Zu bestimmen ist jetzt noch die j-Abhängigkeit der Konstanten K_{36}: wir setzen $r = 0$ und $j = q$ in (8.282); damit für $x,x_o \in [c_{x_o^*},d_{x_o^*}]$ kein Widerspruch zu (8.281) entsteht, muß

$$(8.283)\qquad K_{36} = K_{35}^{j(n-p)}\,(j(n-p))!$$

in (8.282) für $x,x_o \in [c_{x_o^*},d_{x_o^*}]$ gewählt werden dürfen! Mit $K_{38} := \max(K_{35},K_{37})$ folgt also aus (8.282) und (8.283):

$$(8.284)\qquad \left|D^r(N_{x_o}^{-1}m)^{q-j}H_j(x,x_o)\right| \leq K_{38}^{q(n-p)+r}\,(q(n-p)+r)!$$

für alle $x,x_o \in [c_{x_o^*},d_{x_o^*}]$; $q \geq 1$, $r = 0,\ldots,n-1$; $j = 1,\ldots,q$; mit einer Konstanten $K_{38} = K_{38}(c_{x_o^*},d_{x_o^*},f)$,

denn bekanntlich gilt:

$$(8.285)\qquad s!\cdot t! \leq (s+t)! \quad \text{für } s,t \geq 0.$$

Jetzt gelingt es, in (8.279) abzuschätzen:

$$(8.286)\qquad \left|D^rG_q(x,x_o)\right| \leq \sum_{j=1}^{q} K_{38}^{q(n-p)+r}\,(q(n-p)+r)! =$$

$$= q\cdot K_{38}^{q(n-p)+r}\,(q(n-p)+r)! =$$

$$\leq K_{39}^{q(n-p)+r}\,(q(n-p)+r)!$$

für alle $x,x_o \in [c_{x_o^*},d_{x_o^*}]$; $q \geq 1$, $r = 0,\ldots,n-1$; mit einer Konstanten $K_{39} = K_{39}(c_{x_o^*},d_{x_o^*},f)$.

Dies ist gerade die Behauptung (6.119).-

Beweis von Hilfssatz 6.6: Unter Berücksichtigung der Definitionen 6.2 und 6.4 (s.S.31 und S.41) können wir die Behauptung in der folgenden Form schreiben:

$$(8.287)\qquad \left|D^r(N_{x_o}^{-1}m)^qf(x) - D^r(\tilde{N}^{-1}m)^qf(x)\right| \leq C^{q(n-p)+r}\,(q(n-p)+r)!$$

für alle $x,x_o \in [\alpha,\beta]$; $q \geq 0$, $r=0,\ldots,n-1$, und mit einer von [1]) x,x_o,q,r unabhängigen Konstanten $C = C(\alpha,\beta,f)$, $[\alpha,\beta] \subset \{\alpha_o,\beta_o\}$. Der Beweis dieser Abschätzung verläuft völlig analog zum Beweis von Hilfssatz 6.5: wir ersetzen $N_{x_o}^{-1}$ durch $\tilde{N}^{-1}$, $[c_{x_o^*},d_{x_o^*}]$ durch $[\alpha,\beta]$.-

Beweis von Satz 6.12: Nach Voraussetzung sind die Koeffizientenfunktionen der Differentialausdrücke m(y) und n(y) reell-analytisch auf $[0,1]$, d.h. insbesondere, daß auch die Lösungen h(x) von n(y)=0 reell-analytisch auf $[0,1]$ sind. Es gibt also Konstanten, so daß gilt:

$$(8.288)\qquad \left|D^r f_i(x)\right| \leq K_{4o}^{r+1} r! \;;\; \left|D^r g_i(x)\right| \leq K_{41}^{r+1} r! \;;\; \left|D^r h(x)\right| \leq K_{42}^{r+1} r!$$

für alle $i = 1,\ldots,n$ bzw. $i = 1,\ldots,p$ und $r = 0,1,2,\ldots$; $x \in [0,1]$.

Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach q, d.h. wir setzen voraus:

$$(8.289)\qquad \left|D^r (N_{x_o}^{-1}m)^q\, h(x)\right| \leq \bar{C}_o^q\, \bar{C}_1^{qn+r+1} (qn+r)! \quad \text{für alle } \begin{Bmatrix} r=0,1,.. \\ x \in [0,1] \end{Bmatrix}.$$

Für q = 0 können wir $\bar{C}_1 = K_{42}$ wählen, so daß der Induktionsanfang gesichert ist. Wir beweisen nun (8.289) für q+1; dazu schätzen wir ab:

$$(8.290)\qquad \left|D^j m(N_{x_o}^{-1}m)^q h\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \left|f_k^{(i)}\right| \left|D^{n+j-k-i}(N_{x_o}^{-1}m)^q h\right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |f_k| \left|D^{n+j-k}(N_{x_o}^{-1}m)^q h\right| + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \left|f_k^{(i)}\right| \left|D^{n+j-k-i}(N_{x_o}^{-1}m)^q h\right| .$$

Sei $K_{43} := \max(K_{4o},K_{41},K_{42})$; weiterhin sei $\bar{C}_1$ in (8.289) so groß gewählt, daß:

$$(8.291)\qquad \bar{C}_1 \geq 3\cdot K_{43} \quad \text{und} \quad \bar{C}_1 \geq 1$$

ist. Wegen $j^2 \leq 3^j$ für $j \geq 0$ ist dann

$$(8.292)\qquad K_{43}^j\, j! \leq \bar{C}_1^j \frac{j!}{j^2} \quad \text{für} \quad j \geq 1$$

richtig, so daß jetzt (8.290) abgeschätzt werden kann:

$$(8.293)\qquad \left|D^j m(N_{x_o}^{-1}m)^q h\right| \leq (n+1)K_{43}\bar{C}_o^q \bar{C}_1^{qn+n+j+1} (qn+n+j)! + (n+1)K_{43}\bar{C}_o^q \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \bar{C}_1^i \frac{i!}{i^2} \bar{C}_1^{qn+n+j-i+1} (qn+n+j-i)! =$$

[1]) q=r=0 ausgenommen.

$$= (n+1)K_{43}\bar{C}_o^{q}\bar{C}_1^{(q+1)n+j+1}((q+1)n+j)!\cdot\left\{1+\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\frac{i!}{i^2}\frac{((q+1)n+j-i)!}{((q+1)n+j)!}\right\}$$

wobei gilt:

$$\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}\frac{i!}{i^2}\frac{((q+1)n+j-i)!}{((q+1)n+j)!} = \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^2}\frac{j!}{(j-i)!}\frac{((q+1)n+j-i)!}{((q+1)n+j)!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^2}\frac{j\ \cdots\cdots\ (j-i+1)}{((q+1)n+j)\cdots((q+1)n+j-i+1)} \le \sum_{i=1}^{j}\frac{1}{i^2} \le \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} := \bar{C}_2 \quad .$$

Also folgt:

$$(8.294)\qquad \left|D^j m(N_{x_o}^{-1}m)^q h(x)\right| \le \bar{C}_3\cdot\bar{C}_o^{q}\cdot\bar{C}_1^{(q+1)n+j+1}((q+1)n+j)!$$

mit

$$(8.295)\qquad \bar{C}_3 := (n+1)\cdot K_{43}\cdot(1+\bar{C}_2)\ .$$

Sämtliche Konstanten können unabhängig von x,x_o,q,j gewählt werden; sie hängen i.a. nur noch von $h(x)$ ab. Da sich der Kern des Integraloperators $N_{x_o}^{-1}$ durch eine endliche Linearkombination von Lösungen von $n(y)=0$, die ja sämtlich reell-analytisch auf $[0,1]$ sind, darstellen läßt, so folgt aus (8.294) durch Analogieschluß:

$$(8.296)\qquad \left|D^r N_{x_o}^{-1}m(N_{x_o}^{-1}m)^q h(x)\right| \le \bar{C}_4\cdot\bar{C}_o^{q}\cdot\bar{C}_1^{(q+1)n+r}((q+1)n+r)!$$

mit einer nur von $h(x)$ (und natürlich von den Koeffizientenfunktionen $f_i(x)$, $g_i(x)$) abhängenden Konstanten $\bar{C}_4$. Die Konstante $\bar{C}_o$ war in (8.289) beliebig angesetzt worden; wir wählen nun:

$$\bar{C}_o := \bar{C}_4$$

so daß wir aus (8.289) und (8.296) zusammenfassend erhalten:

$$(8.297)\qquad \left|D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q h(x)\right| \le \bar{C}_4^{q}\cdot\bar{C}_1^{qn+r}\cdot(qn+r)! \quad \text{für alle } \begin{Bmatrix} r=0,1,2,\ldots \\ x,x_o\in[0,1]\end{Bmatrix}$$

und nun auch für alle $q = 0,1,2,\ldots$; ($q = r = 0$ ausgeschlossen); dann existiert aber auch eine Konstante $C = C(h)$, unabhängig von x,x_o,q,r, i.a. abhängig von den Koeffizientenfunktionen der Differentialausdrücke $m(y)$, $n(y)$ und der reell-analytischen Funktion $h(x)$, so daß

$$(8.298)\qquad \left|D^r(N_{x_o}^{-1}m)^q\ h(x)\right| \le C^{q(n-p)+r}(q(n-p)+r)! \qquad [1]$$

für $n(h)=0$, also die Bedingung (2.51) erfüllt ist.

[1]) Bei der Umformung von (8.297) auf (8.298) wird (8.108) verwendet.

Der Beweis des zweiten Teiles des Satzes 6.12 verläuft völlig analog, wenn man nur h(x) durch f(x) und $N_{x_o}^{-1}$ durch $\widetilde{N}^{-1}$ ersetzt!-

Beweis von Hilfssatz 7.1: Wir betrachten die Abschätzungen (8.175)-(8.177) und (8.187) im Falle n-m = 2ϰ und stellen fest wegen (8.183):

$$(8.299)\quad \left|G_i(x,\xi,\varrho)\right| \leq \frac{c_5^{(1)}}{r}\,\frac{1}{|\varrho|} \quad \text{für } 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \quad \text{und} \quad |\varrho| > \varrho_o \,. \qquad (i = 2,3,4)$$

Berücksichtigen wir nun:

$$(8.300)\quad \int_{K_j(\varrho)} \frac{|d\varrho|}{|\varrho|^2} = \int_0^{\frac{2\widetilde{\pi}}{n-p}} \frac{d\varphi}{r} = \frac{\frac{2\widetilde{\pi}}{n-p}}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \text{mit } \varrho = r\,e^{i\varphi},$$

so folgt unmittelbar die Behauptung (7.13)(analog für n-m=2ϰ+1).-

Beweis von Hilfssatz 7.2: Sei n-m = 2ϰ und $|\varrho|>\varrho_o$; zunächst bemerken wir, daß (7.14) und (7.18) wegen (8.118) bezüglich ϱ die gleichen asymptotischen Abschätzungen besitzen. Für die Exponentialfaktoren in (7.14) erhalten wir (8.143) für ξ =0 (formal):

$$(8.301)\quad \varrho(\omega_{\nu_{\mu+2}}+\ldots+\omega_{\nu_\mu}) + \varrho\omega_{i-p}x + \varrho\,\omega_{j-p} \quad \text{für } p+1\leq i,j\leq n \,.$$

Dabei müssen wir beachten, daß die Zahlen $\nu_{\mu+2},\ldots,\nu_\mu$ sämtliche Kombinationen von n-m-1 Zahlen aus $\{1,\ldots,n-p\}\setminus\{i-p,j-p\}$ durchlaufen, wenn i,j die Zahlen p+1,...,n durchlaufen. Wir suchen nun den Hauptterm von (8.301) auf; und zwar behaupten wir:

$$(8.302)\quad \Re(\varrho(\omega_{\nu_{\mu+2}}+\ldots+\omega_{\nu_\mu}) + \varrho\omega_{i-p}x + \varrho\omega_{j-p}) \leq \Re(\varrho K_o + \varrho\omega_{j-p}x)\,;$$

$$\text{für alle } x\in[0,1]\,;\ p+1 \leq i,j \leq n\,.$$

Beweis: Aus dem Beweis von Satz 5.1 für $x > \xi$ auf S.87 ergibt sich, daß die Hauptterme in der Doppelsumme (8.156) für i = j angenommen werden: die Hauptterme sind die Terme (8.156). Bedenken wir, daß die Terme von (8.156) in die von (7.14) für ξ =0 übergehen und daß der Term (8.143) stetig ist in x, ξ und ϱ, so ist klar, daß es in (8.156) auch für $0 \leq \xi \leq x \leq 1$ und $\varrho\in S_{2\varkappa}$ und damit in (7.14) keine Terme gibt, deren Realteile größer sind als diejenigen der Terme in (8.157) [1].

---

[1]) Dies hatten wir bereits im Beweis von Satz 5.2 in (8.167) und (8.173) ausgenutzt.

Wir setzen nun die Abschätzungen (8.20)-(8.22) in (7.9) ein und erhalten:

$$(8.303)\qquad D^{o}_{jj}(\varsigma) = O(\varsigma^{K} \cdot e^{\varsigma K_o}) \quad \text{für} \quad j = p+1,\dots,n;\ \varsigma \in S_{2\varkappa}\ .$$

Dies ist natürlich nach (8.149) zu erwarten. Es folgt damit aus (8.303),(8.161) und (3.3):

$$(8.304)\qquad \sum_{i=p+1}^{n} (\pm)\, \bar{y}_i(x,\varsigma)\, \frac{D^{o}_{ij}(\varsigma)}{D(\varsigma)} = O(e^{\varsigma \omega_{j-p} x})$$

$$\text{für } j = p+1,\dots,n;\ x \in [0,1]\ .$$

Berücksichtigen wir jetzt die ς-Potenz in (8.118), so erhalten wir die Behauptung (7.20).

Der Fall $n-m=2\varkappa+1$ läßt sich ebenso behandeln.-

Beweis von Hilfssatz 7.3: Da die Funktionen $\overline{W}_j(\xi,\varsigma)$ die adjungierte Differentialgleichung $m^*(y) = \lambda\, n^*(y)$ erfüllen und wegen der Eigenschaft (6.15) der $N^{-1}m$ - Basis: [1]

$$(8.305)\qquad m(\tilde{f}_{h(n-p)+1}(x,0)) = n(\tilde{f}_{(h-1)(n-p)+1}(x,0))\ ,$$

so folgt für das Integral in (7.25) durch fortgesetzte partielle Integration:

$$(8.306)\qquad \int_0^x W_j(\xi,\varsigma)\, n(\tilde{f}_{h(n-p)+1}(\xi,0))\, d\xi =$$

$$= \int_0^x \overline{\overline{n^*(\overline{W}_j(\xi,\varsigma))}}\, \tilde{f}_{h(n-p)+1}(\xi,\varsigma)\, d\xi - D_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{\varsigma^{n-p}} \int_0^x \overline{\overline{m^*(\overline{W}_j(\xi,\varsigma))}}\, \tilde{f}_{h(n-p)+1}(\xi,0)\, d\xi - D_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x =$$

$$= \frac{1}{\varsigma^{n-p}} \int_0^x W_j(\xi,\varsigma)\, m(\tilde{f}_{h(n-p)+1}(\xi,0))\, d\xi + B_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x -$$

$$- D_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x = \frac{1}{\varsigma^{n-p}} \int_0^x W_j(\xi,\varsigma)\, n(\tilde{f}_{(h-1)(n-p)+1}(\xi,0))\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\varsigma^{n-p}} B_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x - D_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x = \dots$$

[1]) Dies folgt aus (7.10),(7.19) und (8.191).

$$\ldots = \frac{1}{\varrho^{(h+1)(n-p)}} \int_0^x W_j(\xi,\varrho)\, \underbrace{m(\tilde{f}_1(\xi,0))}_{=0}\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\varrho^{(h+1)(n-p)}} B_j(\xi,1)\Big|_0^x - \frac{1}{\varrho^{h(n-p)}} D_j(\xi,1)\Big|_0^x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\varrho^{n-p}} B_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x - D_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x \quad .$$

Also gilt:

$$(8.307) \qquad \int_0^x W_j(\xi,\varrho)\, n(\tilde{f}_{h(n-p)+1}(\xi,0))\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varrho^{(h+1)(n-p)}} \left(B_j(\xi,1) - \varrho^{n-p} D_j(\xi,1) \right)\Big|_0^x + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{\varrho^{n-p}} \left(B_j(\xi,h(n-p)+1) - \varrho^{n-p} D_j(\xi,h(n-p)+1) \right)\Big|_0^x =$$

$$=: E_j(\xi,h(n-p)+1)\Big|_0^x \quad .$$

Wegen (6.16) folgt aus (7.31),(7.32):

$$(8.308) \qquad B_j(0,h(n-p)+1) = D_j(0,h(n-p)+1) = 0 \text{ für } h = 1,2,3,\ldots .$$

und damit wiederum folgt aus (8.307) die Behauptung (7.26).

Wir kommen nun zur Abschätzung des Integrals (8.307) an der oberen Grenze: die in (7.31),(7.32) auftretenden Ableitungen von $W_j(\xi,\varrho)$ lassen sich abschätzen, indem man in (8.126) formal differenziert:

$$(8.309) \qquad W_j^{(q)}(x,\varrho) = O\left(\varrho^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2} - (n-1) + q}\, e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right)$$

$$(j = p+1,\ldots,n \; ; \quad q = 0,1,\ldots,n-1).$$

Wir setzen nun (8.309) und die Abschätzungen (6.26),(6.27) in (7.31),(7.32) ein:

$$(8.310) \qquad B_j(x,1) = O\left(\varrho^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}}\, e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right)$$

$$(8.311) \qquad D_j(x,1) = O\left(\varrho^{\frac{(n-p)(n+p-3)}{2}}\, e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right)$$

$$(8.312)\quad B_j(x,h(n-p)+1) = O\Big(\varrho^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}} e^{-\varrho\omega_{j-p}x} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{h(n-p)+p-i}}{(h(n-p)+p-i)!} |\varrho|^{-i}\Big)$$

$(h \geq 1)$

$$(8.313)\quad D_j(x,h(n-p)+1) = O\Big(\varrho^{\frac{(n-p)(n+p-3)}{2}} e^{-\varrho\omega_{j-p}x} \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \frac{x^{h(n-p)+p-i}}{(h(n-p)+p-i)!} |\varrho|^{-i}\Big) .$$

$(h \geq 1)$

Die Summen schätzen wir weiter ab:

$$(8.314)\quad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{h(n-p)+p-i}}{(h(n-p)+p-i)!} |\varrho|^{-i} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{h(n-p)-i}}{(h(n-p))!} |\varrho|^{-i} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\varrho x|^{h(n-p)-i}}{(h(n-p))!} |\varrho|^{-h(n-p)} \leq$$

$$\leq |\varrho|^{-h(n-p)} \sum_{i=(h-1)(n-p)-p+1}^{h(n-p)} \frac{|\varrho x|^i}{i!}$$

für $h \geq h_0 := \left[\frac{n-1}{n-p}\right] + 1$.

$$(8.315)\quad \sum_{i=0}^{p-1} \frac{x^{h(n-p)+p-i}}{(h(n-p)+p-i)!} |\varrho|^{-i} \leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{x^{h(n-p)-i}}{(h(n-p))!} |\varrho|^{-i} \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{|\varrho x|^{h(n-p)-i}}{(h(n-p))!} |\varrho|^{-h(n-p)} \leq$$

$$\leq |\varrho|^{-h(n-p)} \sum_{i=h(n-p)-p+1}^{h(n-p)} \frac{|\varrho x|^i}{i!}$$

für $h \geq h_1 := \left[\frac{p-1}{n-p}\right] + 1$.

Durch Einsetzen dieser Abschätzungen (8.312)-(8.315) in (8.307) folgt für $h = 0,\ldots,h_0-1$ unmittelbar die Behauptung (7.27), denn die Summen in (8.312),(8.313) lassen sich unabhängig von x,ϱ,h durch eine Konstante abschätzen. Für $h \geq h_0$ folgt unter Verwendung der Summenabschätzungen (8.314) und (8.315):

$$\left|E_j(x,h(n-p)+1)\right| \leq K_{44}\,|\varrho|^{-(h+1)(n-p)+\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}}\left|e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right|\cdot$$

$$\cdot\Big\{1+|\varrho|^{-p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|\varrho x|^{n-i}}{(n-i)!}+\ldots+|\varrho|^{-p}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{|\varrho x|^{(h_o-1)(n-p)+p-i}}{((h_o-1)(n-p)+p-i)!}+$$

$$+\sum_{i=(h_o-1)(n-p)-p+1}^{h_o(n-p)}\frac{|\varrho x|^{i}}{i!}+\ldots+\sum_{i=(h-1)(n-p)-p+1}^{h(n-p)}\frac{|\varrho x|^{i}}{i!}\Big\}\leq$$

$$\leq K_{45}|\varrho|^{-(h+1)(n-p)+\frac{(n-p)(n+p-1)}{2}}\left|e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right|\,S_{h(n-p)}(|\varrho x|),$$

wobei die Konstanten K_{44}, K_{45} unabhängig von x,h,l,j sind. Damit ist (7.27) vollständig bewiesen.

Bleibt noch (7.28) nachzuweisen: das in (8.306) für $\tilde{f}_{h(n-p)+1}$ bis $\tilde{f}_1$ angewandte Verfahren der fortgesetzten partiellen Integration wenden wir in "entgegengesetzter Richtung" an, d.h. wir verwenden die Eigenschaft (6.15) der $\tilde{N}^{-1}m$ - Basis in folgender Form:

$$(8.316)\qquad n(\tilde{f}_{h(n-p)+1}(x,0)) = m(\tilde{f}_{(h+1)(n-p)+1}(x,0))$$

und denken uns das Verfahren unendlich oft ausgeführt:

$$(8.317)\qquad \int_0^x W_j(\xi,\varrho)\; n(\tilde{f}_{h(n-p)+1}(\xi,0))\; d\xi\;=$$

$$=\int_0^x W_j(\xi,\varrho)\; m(\tilde{f}_{(h+1)(n-p)+1}(\xi,0))\; d\xi = -\,B_j(\xi,(h+1)(n-p)+1)\Big|_0^x+$$

$$+\int_0^x \overline{m^*(\overline{W_j(\xi,\varrho)})}\;\tilde{f}_{(h+1)(n-p)+1}(\xi,0)\; d\xi = -\,B_j(\xi,(h+1)(n-p)+1)\Big|_0^x+$$

$$+\varrho^{n-p}\int_0^x \overline{n^*(\overline{W_j(\xi,\varrho)})}\;\tilde{f}_{(h+1)(n-p)+1}(\xi,0)\; d\xi\;=$$

$$=\varrho^{n-p}\,D_j(\xi,(h+1)(n-p)+1)\Big|_0^x-B_j(\xi,(h+1)(n-p)+1)\Big|_0^x+$$

$$+\varrho^{n-p}\int_0^x W_j(\xi,\varrho)\; n(\tilde{f}_{(h+1)(n-p)+1}(\xi,0))\; d\xi\;=\ldots=$$

$$= \varrho^{n-p} \cdot D_j(x,(h+1)(n-p)+l) - B_j(x,(h+1)(n-p)+l) +$$

$$+ \varrho^{2(n-p)} \cdot D_j(x,(h+2)(n-p)+l) - \varrho^{n-p} \cdot B_j(x,(h+2)(n-p)+l) +$$

$$+ \varrho^{3(n-p)} \cdot D_j(x,(h+3)(n-p)+l) - \varrho^{2(n-p)} \cdot B_j(x,(h+3)(n-p)+l) +$$

$$+ \ldots = H_j(x,h(n-p)+l) \quad \text{für } j=p+1,\ldots,n;\ h \geq 0 \,. \tag{8.318}$$

Wegen (8.308) verschwinden nämlich die ausintegrierten Anteile an der unteren Grenze. Wir schätzen $H_j(x,h(n-p)+l)$ in (8.318) ab, indem wir die Abschätzungen (8.312)-(8.313 einsetzen:

$$\left|H_j(x,h(n-p)+l)\right| \leq K_{46}|\varrho|^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2} - (h+1)(n-p)-p} \cdot \left|e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right| \left\{ \sum_{i=(h+1)(n-p)+1}^{(h+1)(n-p)+p} \frac{|\varrho x|^i}{i!} + \sum_{i=h(n-p)+1}^{(h+1)(n-p)+p} \frac{|\varrho x|^i}{i!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=(h+2)(n-p)+1}^{(h+2)(n-p)+p} \frac{|\varrho x|^i}{i!} + \sum_{i=(h+1)(n-p)+1}^{(h+2)(n-p)+p} \frac{|\varrho x|^i}{i!} + \ldots \right\} \leq$$

$$\leq K_{47}|\varrho|^{\frac{(n-p)(n+p-1)}{2} - (h+1)(n-p)-p} \left|e^{-\varrho\omega_{j-p}x}\right| \cdot T_{h(n-p)+1}(|\varrho x|) \,; \tag{8.319}$$

für $j = p+1,\ldots,n$ mit einer von x,h,l,j unabhängigen Konstanten K_{47}. Damit ist Hilfssatz 7.3 vollständig bewiesen.-

Beweis von Hilfssatz 7.4: Sei wieder $\{\overline{y}_1(x,\varrho),\ldots,\overline{y}_n(x,\varrho)\}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (2.40); wir betrachten die damit definierten Funktionen:

$$W_{j,k}(x,\varrho) := \begin{vmatrix} \overline{y}_1 & \cdots & \overline{y}_{j-1} & \overline{y}_{j+1} & \cdots & \overline{y}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{y}_1^{(k-1)} & \cdots & \overline{y}_{j-1}^{(k-1)} & \overline{y}_{j+1}^{(k+1)} & \cdots & \overline{y}_n^{(k+1)} \\ \overline{y}_1^{(k+1)} & \cdots & \overline{y}_{j-1}^{(k+1)} & \overline{y}_{j+1}^{(k+1)} & \cdots & \overline{y}_n^{(k+1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{y}_1^{(n-1)} & \cdots & \overline{y}_{j-1}^{(n-1)} & \overline{y}_{j+1}^{(n-1)} & \cdots & \overline{y}_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (x,\varrho) \tag{8.320}$$

Insbesondere gilt also $W_{j,n-1} = W_j$ (s.S.48). Weiterhin gilt:

$$(8.321)\quad \frac{d}{dx} W_{j,k}(x,\varrho) = W_{j,k-1}(x,\varrho) - (-1)^{n-k}(f_{n-k}(x) - \lambda g_{p-k}(x)) \cdot W_j(x,\varrho)$$

mit $g_{p-k}(x) \equiv 0$ für $k > p$ und für $j = 1,\dots,n$; $k = 0,\dots,n-1$.

Beweis: Da die $\overline{y}_i(x,\varrho)$ Lösungen von $m(y) = \lambda\, n(y)$ sind, gilt:

$$(8.322)\quad \overline{y}_i^{(n)} = - f_1\overline{y}_i^{(n-1)} - f_2\overline{y}_i^{(n-2)} - \dots - f_n\overline{y}_i + \lambda\,(\overline{y}_i^{(p)} + g_1\overline{y}_i^{(p-1)} + \dots + g_p\overline{y}_i) \quad .$$

Leiten wir die Determinante (8.320) einmal nach x ab, so können wir von Null verschiedene Anteile nur dann erwarten, wenn die k-te oder die n-te Zeile in der Determinante differenziert wird; wird die k-te Zeile differenziert, so ergibt sich $W_{j,k-1}$; wird die n-te Zeile differenziert, so müssen wir anschließend (8.322) einsetzen, so daß insgesamt entsteht:

$$(8.323)\quad W'_{j,k} = W_{j,k-1} - (-1)^{n-k}(f_{n-k} - \lambda\, g_{p-k})W_j - (f_1 - \lambda\cdot\delta_{p,n-1})W_{j,k}$$

mit $g_{p-k}(x) \equiv 0$ für $k > p$. Wegen (2.41) ($f_1(x) \equiv 0$) und (2.43) verschwinden die beiden letzten Summanden in (8.323), so daß (8.321) bewiesen ist.

Durch geeignete Wahl der Indizes erhalten wir aus (8.321)

$$(8.324)\quad ((f_{n-1-i-q} - \lambda\, g_{p-1-i-q})W_j)^{(q)} = (W_{j,k-1} - W'_{j,k})^{(q)}\,(-1)^{n-k}$$

mit $k := 1+i+q$; $q = 0,\dots,n-2-i$; $i = 0,\dots,n-1$; $q+i = 0,..,n-2$; also: $k = 1,\dots,n-1$.

In (7.36) betrachten wir zunächst $E_j(0,h(n-p)+1)$; wir setzen in (7.26) die Ausdrücke (7.31),(7.32) ein und formen soweit um, daß wir (8.324) einsetzen können:

$$(8.325)\quad E_j(0,h(n-p)+1) = \frac{1}{\varrho^{(h+1)(n-p)}}(B_j(0,1) - \varrho^{n-p}D_j(0,1)) =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_1^{(i)}(x,0) \sum_{q=0}^{n-1-i} (-1)^{q+1} \left(f_{n-1-i-q}(x) W_j(x,\varrho)\right)^{(q)}_{/x=0} - \right.$$

$$\left. - \lambda \sum_{i=0}^{p-1} \tilde{f}_1^{(i)}(x,0) \sum_{q=0}^{p-1-i} (-1)^{q+1} \left(g_{p-1-i-q}(x) W_j(x,\varrho)\right)^{(q)} \right\}_{/x=0} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_1^{(i)}(x,0) \sum_{q=0}^{n-1-i} (-1)^{q+1} \cdot$$

$$\cdot \left(\left(f_{n-1-i-q}(x) - \lambda g_{p-1-i-q}(x)\right) W_j(x,\varrho) \right)^{(q)}_{/x=0} =$$

(mit $g_{p-1-i-q}(x) \equiv 0$ für $q+i = p,\ldots,n-1$)

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_1^{(i)}(x,0) \left\{ \sum_{q=0}^{n-2-i} (-1)^{q+1} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(\left(f_{n-1-i-q}(x) - \lambda g_{p-1-i-q}(x)\right) W_j(x,\varrho) \right)^{(q)} + (-1)^{n-i} W_j^{(n-1-i)}(x,\varrho) \right\}_{/x=0} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_1^{(i)}(x,0) \left\{ \sum_{q=0}^{n-2-i} (-1)^{q+1} (-1)^{n-1-i-q} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(W_{j,i+q}^{(q)}(x,\varrho) - W_{j,i+q+1}^{(q+1)}(x,\varrho) \right) + (-1)^{n-i} W_j^{(n-1-i)}(x,\varrho) \right\}_{/x=0} =$$

(wegen (8.324); da die Summe über q eine "Teleskopsumme" ist, folgt weiter:)

$$(8.326) \qquad = \frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_1^{(i)}(x,0)(-1)^{n-i} W_{j,i}(x,\varrho)_{/x=0} = E_j(0,h(n-p)+1).$$

Nun wenden wir uns der Behauptung (7.36) zu: durch Einsetzen von (8.326) in (7.36) und anschließende Summenvertauschung erhalten wir:

$$(8.327) \qquad \sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_l E_j(0,h(n-p)+1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_l \frac{1}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{f}_1^{(i)}(\xi,0)(-1)^{n-i} W_{j,i}(\xi,\varrho)_{/\xi=0} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\lambda^{k+1}} \sum_{l=p}^{n-1} b_l \sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \tilde{f}_1^{(i)}(\xi,0) W_{j,i}(\xi,\varrho)_{/\xi=0} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\lambda^{k+1}} \sum_{l=p}^{n-1} b_l \cdot \Phi_l(x,\varrho)$$

mit:

$$(8.328)\qquad \Phi_l(x,\varrho) := \left| \begin{matrix} \tilde{f}_l(\xi,0) & \overline{y}_1(\xi,\varrho) & \cdots & \overline{y}_n(\xi,\varrho) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_l^{(n-1)}(\xi,0) & \overline{y}_1^{(n-1)}(\xi,\varrho) & \cdots & \overline{y}_n^{(n-1)}(\xi,\varrho) \\ 0 & N_1^0(x,\varrho) & \cdots & N_n^0(x,\varrho) \end{matrix} \right|_{/\xi=0}$$

Wir führen in der Determinante die elementaren Zeilentransformationen durch, so daß in den (k_i+1)-ten Zeilen $(i = 1,\ldots,m)$ die Randbedingungen in $x = 0$ auftreten:

$$(8.329)\qquad \Phi_l(x,\varrho) = \left| \begin{matrix} \tilde{f}_l(0,0) & \overline{y}_1(0,\varrho) & \cdots & \overline{y}_n(0,\varrho) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_m(\tilde{f}_l) & U_m(\overline{y}_1) & \cdots & U_m(\overline{y}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_1(\tilde{f}_l) & U_1(\overline{y}_1) & \cdots & U_1(\overline{y}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{f}_l^{(n-1)}(0,0) & \overline{y}_1^{(n-1)}(0,\varrho) & \cdots & \overline{y}_n^{(n-1)}(0,\varrho) \\ 0 & N_1^0(x,\varrho) & \cdots & N_n^0(x,\varrho) \end{matrix} \right|$$

Mit dieser Determinante (8.329) bilden wir jetzt $\sum_{l=p}^{n-1} b_l \Phi_l(x,\varrho)$; da nach Voraussetzung des Hilfssatzes 7.4

$$(8.330)\qquad \sum_{l=p}^{n-1} b_l \cdot U_j(\tilde{f}_l) = 0 \quad \text{für} \quad j = 1,\ldots,m$$

gilt, folgt:

$$(8.331)\qquad \sum_{l=p}^{n-1} b_l \Phi_l(x,\varrho) = \left| \begin{matrix} \varphi(0) & \overline{y}_1(0,\varrho) & \cdots & \overline{y}_n(0,\varrho) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & U_m(\overline{y}_1) & \cdots & U_m(\overline{y}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & U_1(\overline{y}_1) & \cdots & U_1(\overline{y}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(0) & \overline{y}_1^{(n-1)}(0,\varrho) & \cdots & \overline{y}_n^{(n-1)}(0,\varrho) \\ 0 & N_1^0(x,\varrho) & \cdots & N_n^0(x,\varrho) \end{matrix} \right|$$

Nun betrachten wir (7.7),(7.8),(7.10) und (7.14); wir lesen ab:

$$(8.332)\quad \frac{(-1)^{n-j}}{W(\xi,\varrho)D(\varrho)}\cdot M_j(x,\varrho) =$$

$$= N_j(x,\xi,\varrho) + \frac{1}{W(\xi,\varrho)D(\varrho)} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j} \bar{y}_i(x,\varrho)\, D_{ij}^{o}(\varrho)$$

für $j = 1,\dots,n$.

Beachten wir die Darstellung (7.6) von $M_j(x,\varrho)$, so erkennen wir:

$$(8.333)\quad N_j(x,\xi,\varrho) = \frac{(\pm 1)}{W(\xi,\varrho)D(\varrho)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \dots 0\ \bar{y}_{p+1}(x,\varrho) \dots \bar{y}_n(x,\varrho) \\ U_1(\bar{y}_j) & U_1(\bar{y}_1) \dots\dots\dots U_1(\bar{y}_n) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ U_m(\bar{y}_j) & U_m(\bar{y}_1) \dots\dots\dots U_m(\bar{y}_n) \\ 0 & U_{m+1}(\bar{y}_1) \dots\dots\dots U_{m+1}(\bar{y}_n) \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 & U_n(\bar{y}_1) \dots\dots\dots U_n(\bar{y}_n) \end{vmatrix}$$

wenn wir zuvor in der Determinante (7.6) die (j+1)-te Spalte zur ersten Spalte hinzuaddieren und anschließend beide Spalten miteinander vertauschen. Wegen (7.18),(7.19) gilt eine (8.333) entsprechende Darstellung auch für $N_j^o(x,\varrho)$, wenn man nur $W(\xi,\varrho)$ in (8.333) durch $W_o(\varrho)$ ersetzt. Entwickeln wir nun die Determinante in (8.333) nach der ersten Spalte, so erhalten wir für $N_j^o(x,\varrho)$:

$$(8.334)\quad N_j^o(x,\varrho) = \frac{(\pm 1)}{W_o(\varrho)D(\varrho)} \sum_{i=1}^{m} U_i(\bar{y}_j)\, D_i(x,\varrho) =$$

$$= \pm \sum_{i=1}^{m} U_i(\bar{y}_j) \frac{D_i(x,\varrho)}{W_o(\varrho)D(\varrho)} \quad , \qquad (j = 1,\dots,n)$$

wobei insbesondere die entsprechenden Unterdeterminanten $D_i(x,\varrho)$ nicht von j abhängen! Also lassen sich die $N_j^o(x,\varrho)$ $(j = 1,\dots,n)$ als Linearkombinationen der Randterme $U_i(\bar{y}_j)$ auffassen; deshalb folgt aus (8.331)

$$\sum_{l=p}^{n-1} b_l \phi_l(x,\varrho) \equiv 0 \qquad \text{für alle } x \in [0,1]$$

und damit aus (8.327) die Behauptung (7.36).-

Beweis von Hilfssatz 7.5: Wir schätzen das Integral (7.45) über (7.44) ab, indem wir (7.49) und (7.25) einsetzen:

$$(8.335)\quad \left|\tilde{I}(x,\varrho)\right| = \left| \sum_{j=p+1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(\xi, h(n-p)+l) \right|_o^x$$

$$= \left| \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(x, h(n-p)+l) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{j=1}^{p} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(\xi, h(n-p)+l) \right|_o^x \right\} \Bigg| =$$

(wegen (7.49) und (7.36))

$$= \left| \sum_{h=0}^{\infty} \left\{ \sum_{j=p+1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(x, h(n-p)+l) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=1}^{p} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(0, h(n-p)+l) \right\} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=p+1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(x, h(n-p)+l) \right| + \frac{C_6}{|\varrho|} \leq$$

(wegen (8.299) im Beweis von Hilfssatz 7.1)

$$\leq \left| \sum_{h=h_o}^{\infty} \sum_{j=p+1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} E_j(x, h(n-p)+l) \right| + \frac{C_7}{|\varrho|}$$

(wegen der Abschätzung (7.27) für $h = 0,\ldots,h_o-1$).

Aus der ersten Gleichung in (8.335) und (7.25) folgt unmittelbar:

$$(8.336)\quad \left|\tilde{I}(x,\varrho)\right| = \left| \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=p+1}^{n} N_j^o(x,\varrho) \sum_{l=p}^{n-1} b_{h(n-p)+l} H_j(x, h(n-p)+l) \right|.$$

Diese beiden Gleichungen betrachten wir nun nacheinander: zunächst setzen wir die Abschätzung (7.27) in die letzte von (8.335) ein und beachten (7.20):

$$(8.337)\quad \left|\tilde{I}(x,\varrho)\right| \leq K_{48} \sum_{h=h_o}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} \left|b_{h(n-p)+l}\right| |\varrho|^{-(h+1)(n-p)} \cdot$$

$$\cdot S_{h(n-p)}(|\varrho x|) + \frac{C_7}{|\varrho|} \cdot$$

Sei im folgenden stets $0 < \Delta \leq x \leq 1$ vorausgesetzt; dann gelten die Abschätzungen:

$$S_{h(n-p)}(|\varsigma x|) = 1 + \ldots + \frac{|\varsigma x|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \leq \frac{|\varsigma x|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \left(1 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \left(\frac{h(n-p)}{|\varsigma x|}\right)^{h(n-p)} \right) \leq \quad \left\{ \text{wegen: } \frac{(h(n-p))!}{(h(n-p)-i)!} \leq (h(n-p))^i \text{ für } i = 0,\ldots,h(n-p) \right\}$$

$$\leq \frac{|\varsigma x|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \left(1 + \ldots + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{h(n-p)} \right) =$$

$$= \frac{|\varsigma x|^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \left(1 + \ldots + \delta^{h(n-p)} \right) \left(\frac{1}{\delta}\right)^{h(n-p)}$$

für:

$$(8.338) \qquad \frac{h(n-p)}{|\varsigma x|} \leq \frac{1}{\delta} \quad .$$

Wegen (7.47) gilt:

$$(8.339) \qquad 1 + \ldots + \delta^{h(n-p)} \leq \frac{1}{1-\delta} \quad .$$

Also erhalten wir zusammenfassend:

$$(8.340) \qquad S_{h(n-p)}(|\varsigma x|) \leq K_{49} \frac{(|\varsigma x|/\delta)^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} \quad \text{für (8.339)} \; .$$

Analog verfahren wir bei $T_{h(n-p)+1}(|\varsigma x|)$:

$$T_{h(n-p)+1}(|\varsigma x|) \leq \frac{|\varsigma x|^{h(n-p)+1}}{(h(n-p)+1)!} \left(1 + \frac{|\varsigma x|}{h(n-p)+1} + \left(\frac{|\varsigma x|}{h(n-p)+1}\right)^2 + \ldots \right)$$

$$\left(\text{wegen: } \frac{(h(n-p)+1+i)!}{(h(n-p)+1)!} \geq (h(n-p)+1)^i \quad \text{für } i = 0,1,2,\ldots \right)$$

$$\leq \frac{|\varsigma x|^{h(n-p)+1}}{(h(n-p)+1)!} \left(1 + \delta + \delta^2 + \ldots \right)$$

für:

$$(8.341) \qquad \frac{|\varsigma x|}{h(n-p)+1} \leq \delta \quad .$$

Also erhalten wir zusammenfassend:

$$(8.342)\qquad T_{h(n-p)+1}(|\varsigma x|) \le K_{50}\frac{|\varsigma x|^{h(n-p)+1}}{(h(n-p)+1)!} \quad \text{für (8.341)}.$$

Dabei sind die Konstanten $K_{49} = K_{49}(\delta)$ und $K_{50} = K_{50}(\delta)$ unabhängig von x,ς,h. Wir setzen nun (8.340) in (8.337) ein:

$$(8.343)\qquad |\tilde{I}(x,\varsigma)| \le \frac{K_{51}}{|\varsigma|^{n-p}} \sum_{h=h_o}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} |b_{h(n-p)+l}| \frac{(x/\delta)^{h(n-p)}}{(h(n-p))!} + \frac{C_7}{|\varsigma|}$$

für (8.338).

Aus (8.336) und (7.20),(8.319) erhalten wir:

$$(8.344)\qquad |\tilde{I}(x,\varsigma)| \le K_{52} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} |b_{h(n-p)+l}|\,|\varsigma|^{-(h+1)(n-p)-p} \cdot$$

$$\cdot\, T_{h(n-p)+1}(|\varsigma x|) \le$$

$$\le \frac{K_{53}}{|\varsigma|^{n-1}} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} |b_{h(n-p)+l}| \frac{x^{h(n-p)+1}}{(h(n-p)+1)!} \quad \text{(wegen (8.342))}$$

für (8.341).

Die Konstanten K_{51},K_{52},K_{53} hängen nur von δ ab. Aus (8.343) und (8.344) folgt die für alle $|\varsigma|$ mit (8.338) und (8.341), und damit für alle $|\varsigma| > \varsigma_o$ geltende gemeinsame Abschätzung:

$$(8.345)\qquad |\tilde{I}(x,\varsigma)| \le \frac{C_8}{|\varsigma|} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{l=p}^{n-1} |b_{h(n-p)+l}| \frac{(\frac{x}{\delta})^{h(n-p)}}{(h(n-p))!}$$

mit $C_8 = C_8(\delta)$.

Damit ist Hilfssatz 7.5 bewiesen.-

Beweis von Satz 7.2:

a)"Aus 1) folgt 2)":Diese Aussage folgt unmittelbar aus Satz 6.11.

b)"Aus 2) folgt 3)":Diese Aussage entnehmen wir dem Satz 7.1: im Beweis des Satzes wird von der Entwicklung (7.21) ausgegangen.

c)"Aus 3) folgt 1)":Dies ist eine direkte Folgerung des Satzes 4.4 .

Beweis von Satz 7.3: Wir müssen lediglich noch (ii) nachweisen: Aus (6.124),(6.125) und (4.12) erhalten wir:

$$(8.346)\qquad |\tilde{a}_\mu| \le \tilde{C}_\delta \cdot \left(\frac{1+\delta}{(x_1-\delta)\cdot\cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})}\right)^{\mu} \cdot \mu! \quad ;(\mu = 0,1,..;\ 0<\delta<x_1)$$

und deshalb:

$$\tilde{R}^{-1} \leq \frac{1+\delta}{(x_1-\delta)\cdot\cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})} \quad \text{für alle } 0<\delta<x_1 \tag{8.347}$$

bzw.:

$$\tilde{R} \geq \cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})\cdot\frac{x_1-\delta}{1+\delta} \quad \text{für alle } 0<\delta<x_1\ , \tag{8.348}$$

und daraus die Behauptung!

Beweis von Hilfssatz 7.6: Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Satz 6.12 und führen den Beweis durch vollständige Induktion nach q, d.h. wir setzen voraus: mit $\bar{r} := \max(r,n-1)$ sei:

$$\left|D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)_{/x=0}\right| \leq C_q\cdot\bar{C}_o^{q(n-p)+\bar{r}}\cdot(q(n-p)+\bar{r})!\ ;\quad r=0,1,\ldots \tag{8.349}$$

Der Induktionsschritt von q nach q+1 wird uns Informationen über die Konstante C_q liefern; zunächst jedoch setzen wir q = 0 in (8.349): da f(z) holomorph in $|z|\leq a$ vorausgesetzt ist, ist f(x) um x = 0 in eine gewöhnliche Taylorreihe auf $[0,a]$ entwickelbar, d.h. nach dem Wurzelkriterium und mit der Definition (7.76) gilt:

$$R^{-1}+\varepsilon \geq \sqrt[+]{\frac{|f^{(r)}(0)|}{r!}} \quad \text{für alle } r\geq r_o(\varepsilon),\ \varepsilon>0; \tag{8.350}$$

mit:

$$R > a\ ; \tag{8.351}$$

also existieren Konstanten $C < \frac{1}{a}$ und F, so daß gilt:

$$|f^{(r)}(0)| \leq F\cdot C^r\cdot r! \quad \text{für alle } r\geq 0. \tag{8.352}$$

Demnach ist die Abschätzung (8.349) für q = 0 und alle $r \geq 0$ mit

$$C_o := F,\quad \bar{C}_o = C \tag{8.353}$$

gesichert. Im folgenden Schritt von q auf q+1 werden wir diese Festsetzung (8.353) beibehalten und eine Gesetzmäßigkeit für C_q feststellen: mit $\tilde{H}(x,t)$ bezeichnen wir den Kern des Integraloperators $\tilde{N}^{-1}$:

$$\tilde{N}^{-1}y(x) = \int_0^1 \tilde{H}(x,t)y(t)dt\ , \tag{8.354}$$

Berücksichtigen wir die Stetigkeits- und Sprungrelation:

$$(8.355)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \tilde{H}(x,t)_{/t=x-0} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^s \tilde{H}(x,t)_{/t=x+0} = \begin{cases} 0 & s < p-1 \\ 1 & s = p-1 \end{cases} \text{ falls } \Big\},$$

so erhalten wir:

$$(8.356)\quad D^r(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1}f(x) = \int_0^1 \tilde{H}_x^{(r)}(x,t)m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(t)dt +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-p} D^j\left\{\left(\tilde{H}_x^{(r-1-j)}(x,t)_{/t=x-0} - \tilde{H}_x^{(r-1-j)}(x,t)_{/t=x+0}\right)m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right\},$$

und erkennen, daß $D^{n+r-p}(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)$ die höchste in (8.356) vorkommende Ableitung von $(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)$ im Falle $r \geq n-1$ ist, die zu-[1]) gleich den Koeffizienten 1 hat! Um nun in (8.356) mittels (8.349) abschätzen zu können, müssen wir die rechte Seite in (8.356) näher untersuchen: aus der Voraussetzung der Holomorphie der Koeffizientenfunktionen in $|z| \leq 1$ folgt analog zu (8.352):

$$(8.357)\quad \left|f_i^{(r)}(0)\right| \leq \left(\frac{1}{F_i} + \varepsilon\right)^r \cdot r! \qquad \text{für alle } r \geq r_{of}^{(i)}(\varepsilon)\ ;$$

$$(8.358)\quad \left|g_i^{(r)}(0)\right| \leq \left(\frac{1}{G_i} + \varepsilon\right)^r \cdot r! \qquad \text{für alle } r \geq r_{og}^{(i)}(\varepsilon)\ ;$$

für $i = 1,\ldots,n$ bzw. $i = 1,\ldots,p$. Da sämtliche Konvergenzradien F_i, G_i größer als 1 sind, existieren Konstanten $K < 1$, L, so daß:

$$(8.359)\quad \left|f_i^{(r)}(0)\right| \leq L\cdot K^r \cdot r!\ ,\ \left|g_i^{(r)}(0)\right| \leq L\cdot K^r \cdot r! \quad \text{für alle } r \geq 0\ .$$

Analog zu (8.290) können wir nun mit Hilfe von (8.359),(8.349) abschätzen:

$$(8.360)\quad \left|D^j m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)_{/x=0}\right| \leq C_q \cdot \bar{C}_o^{q(n-p)+n+j}(q(n-p)+n+j)!\ \cdot$$

$$\cdot\left\{1 + \frac{nM}{\bar{C}_o}\cdot\frac{1}{q(n-p)+n+j} + \frac{nL}{\bar{C}_o}\cdot\sum_{i=1}^{j}\binom{j}{i}K^i\cdot i!\,\bar{C}_o^{-i}\cdot\frac{(q(n-p)+n+j-1-i)!}{(q(n-p)+n+j)!}\right\}$$

mit:

$$M := \max_{1\leq i\leq n}\left|f_i(0)\right|$$

für $q \geq q_o(\bar{C}_o)$. Die Summe schätzen wir wie folgt ab:

$$(8.361)\quad \sum_{i=1}^{j}\cdots \leq \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{K}{\bar{C}_o}\right)^i\cdot\frac{1}{q(n-p)+n+j} < \frac{K_{54}}{q(n-p)+n+j}\ ;$$

[1]) Dieser Sachverhalt wird auf S.131 in (8.376) wirksam.

mit einer von q und j unabhängigen Konstanten K_{54}, denn wir können in (8.352),(8.353) C und F so wählen, daß neben den Bedingungen

$$(8.362) \qquad K < 1 \leq \frac{1}{a} \; ; \qquad \frac{1}{R} < C < \frac{1}{a}$$

auch:

$$(8.363) \qquad K < C$$

erfüllt ist! Da (8.361) für alle $j \geq 0$ gilt, existiert eine Konstante K_{55} unabhängig von q und j, so daß aus (8.360) und (8.361) folgt:

$$(8.364) \quad \left| D^j m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)_{/x=0} \right| \leq C_q \cdot \bar{C}_o^{q(n-p)+n+j} (q(n-p)+n+j)! \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{K_{55}}{(q+1)(n-p)} \right\} \quad \text{für alle } j \geq 0,\ q \geq 0.$$

Schließlich müssen wir noch das Integral in (8.356) untersuchen: dazu schreiben wir den Integraloperator (8.354) in der Form:

$$(8.365) \quad \tilde{N}^{-1}y(x) = N_o^{-1}y(x) + \sum_{j=1}^{p} c_j h_j(x) =$$

$$= \int_o^x H(x,t)y(t)dt + \sum_{j=1}^{p} c_j h_j(x) \quad ,$$

wobei H(x,t) der Kern des Integraloperators N_o^{-1} ist, der entsprechende Eigenschaften wie K(x,t)(s.S.95) hat, und wobei $\{h_1(x),\ldots,h_p(x)\}$ ein Fundamentalsystem von n(y)=0 ist und die Koeffizienten c_j (j=1,..,p) über die p Anfangsbedingungen $U_j(y) = 0$ (j=m-p+1,...,m) des Operators $\tilde{N}$ bestimmt sind: [1])

$$(8.366) \qquad \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = - D_o^{-1} U \begin{pmatrix} D^o N_o^{-1}y(x) \\ \vdots \\ D^{n-1}N_o^{-1}y(x) \end{pmatrix}_{/x=0}$$

mit:

$$(8.367) \qquad D^j N_o^{-1}y(x)_{/x=0} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } j=0,\ldots,p-1 \\ \sum_{k=0}^{j-p} D^k \left\{ H_x^{(j-1-k)}(x,t)_{/t=x-0} \cdot y(x) \right\}_{/x=0} & \text{für } j=p,\ldots,n-1 \end{array} \right\}.$$

[1]) vgl. (6.58) für $x_o = 0$.

Zunächst setzen wir die Umformung (8.365) in (8.356) ein:

$$(8.368)\qquad D^r(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1}f(x) = \int_0^x H_x^{(r)}(x,t)m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(t)dt + \\ + \sum_{j=1}^{p} c_j h_j^{(r)}(x) + \sum_{i=0}^{r-p} D^i\left(H_x^{(r-1-i)}(x,t)_{/t=x-0}\, m(N^{-1}m)^q f(x)\right)$$

bzw.:

$$(8.369)\qquad D^r(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1}f(x)_{/x=0} = \sum_{j=1}^{p} c_j h_j^{(+)}(x)_{/x=0} + \\ + D^{r-p}m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)_{/x=0} + \sum_{i=0}^{r-p-1} D^i\left(H_x^{(r-1-i)}(x,t)_{/t=x-0}\, m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)\right)_{x=0}$$

Für $q \geq q_0(\bar{C}_0)$ ist stets nach (8.364) in (8.369) der Term mit der höchsten Ableitung von $m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)$ in x=0 Majorante aller übrigen Terme: deshalb folgt aus (8.367) und (8.364):

$$(8.370)\qquad |c_j| \leq K_{56}\, C_q\, \bar{C}_0^{(q+1)(n-p)+n-3}((q+1)(n-p)+n-3)! \cdot \\ \cdot\left\{1 + \frac{K_{57}}{q}\right\}$$

mit Konstanten K_{56}, K_{57} für alle $q \geq q_0(\bar{C}_0)$, $j=1,\ldots,p$; dabei haben wir benutzt, daß aus (2.49) folgt:

$$(8.371)\qquad m \geq p+2, \text{ und daraus wiederum: } k_{m-p+1} \leq n-3.$$

Wegen der vorausgesetzten Holomorphie der Koeffizientenfunktionen existieren Konstanten P, $K<1$, unabhängig von r, $1 \leq j \leq p$, daß:

$$(8.372)\qquad \left|D^r h_j(x)_{/x=0}\right| \leq P\cdot K^{r-n+1}(r-n+1)! \quad \text{für } r \geq n-1$$

gilt. Somit folgern wir aus (8.370) und (8.372):

$$(8.373)\qquad \left|\sum_{j=1}^{p} c_j h_j^{(r)}(x)_{/x=0}\right| \leq K_{58}\, C_q\, \bar{C}_0^{(q+1)(n-p)+r-2} \cdot \\ \cdot((q+1)(n-p)+r-2)!\left\{1 + \frac{K_{59}}{q}\right\} \leq \\ \leq C_q\, \bar{C}_0^{(q+1)(n-p)+\bar{r}}((q+1)(n-p)+\bar{r})!\,\frac{K_{60}}{q}$$

nun für alle $r = 0,1,2,\ldots$; $q \geq q_0(\bar{C}_0)$, $\bar{r} := \max(r,n-1)$.

Für die Abschätzung der zweiten Summe in (8.369) nutzen wir die aus (8.359) folgende Abschätzung aus:

$$(8.374)\quad \left| D^k \left(H_x^{(r-1-i)}(x,t)_{/t=x-0} \right)_{/x=0} \right| \leq T \cdot K^{k+r-p-1-i}\, k!(r-1-p-i)!$$

mit einer Konstanten $K < 1$. Unter Berücksichtigung von (8.364) erhalten wir:

$$(8.375)\quad \left| \sum_{i=0}^{r-p-1} D^i \left(H_x^{(r-1-i)}(x,t)_{/t=x-0}\, m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x) \right)_{/x=0} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{r-p-1} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} T \cdot K^{k+r-p-1-i}\, k!(r-p-1-i)!\, C_q\, \bar{C}_o^{q(n-p)+n+i-k} \cdot$$

$$\cdot (q(n-p)+n+i-k)! \left\{ 1 + \frac{K_{61}}{q} \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{r-p-1} \sum_{k=0}^{r-p-1-i} \binom{r-p-1-i}{k} K^{k+i}\, k!\, i! \cdot \bar{C}_o^{(q+1)(n-p)+r-(k+i)-1} \cdot$$

$$\cdot ((q+1)(n-p)+r-1-(k+i))!\; T\, C_q \left\{ 1 + \frac{K_{61}}{q} \right\} =$$

$$= T\, C_q \left\{ 1 + \frac{K_{61}}{q} \right\} \bar{C}_o^{(q+1)(n-p)+r-1} ((q+1)(n-p)+r-1)! \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{r-p-1} \sum_{k=0}^{r-p-1-i} \left(\frac{K}{\bar{C}_o} \right)^{k+i} \cdot \frac{(r-p-1)!\; ((q+1)(n-p)+r-1-(k+i))!}{(r-p-1-(k+i))!\; ((q+1)(n-p)+r-1)!} \leq$$

$$\leq T\, C_q \left\{ 1 + \frac{K_{61}}{q} \right\} \bar{C}_o^{(q+1)(n-p)+r-1} ((q+1)(n-p)+r-1)! \cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{r-p-1} (j+1) \left(\frac{K}{\bar{C}_o} \right)^j \leq$$

$$\leq C_q\, \bar{C}_o^{(q+1)(n-p)+r} ((q+1)(n-p)+r)! \cdot \frac{K_{62}}{q}$$

für alle $r = p+1, \ldots$; $q \geq q_o(\bar{C}_o)$, wenn man wiederum (8.353) und (8.363) wählt. Das Konvergenzverhalten von (8.369) für genügend große q wird also bestimmt von (siehe (8.364)):

$$(8.376)\quad \left| D^{r-p} m(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)_{/x=0} \right| \leq C_q\, \bar{C}_o^{(q+1)(n-p)+r} ((q+1)(n-p)+r)! \cdot$$

$$\cdot \left\{ 1 + \frac{K_{63}}{q} \right\}$$

für $q \geq q_o(\bar{C}_o)$ und $r \geq p$. Zusammenfassend erhalten wir aus (8.369),(8.373),(8.375) und (8.376):

$$(8.377)\quad \left| D^r(\tilde{N}^{-1}m)^{q+1}f(x)_{/x=0} \right| \leq C_q \cdot \bar{C}_o^{(q+1)(n-p)+\bar{r}} ((q+1)(n-p)+\bar{r})! \cdot \cdot \left\{1 + \frac{K_{64}}{q+1}\right\}$$

für $q \geq q_o(\bar{C}_o)$ und alle $r = 0,1,2,\ldots$; dabei ist eine von q und r unabhängige Konstante. Ein Vergleich mit der Induktionsvoraussetzung (8.349) liefert:

$$(8.378)\qquad C_{q+1} = C_q \left(1 + \frac{K_{64}}{q+1}\right) \quad \text{für } q \geq q_o(\bar{C}_o).$$

Damit ist die Abschätzung (8.349) für alle $q \geq 0$ nachgewiesen, wenn wir setzen:

$$(8.379)\qquad C_q = K(q_o)\cdot\left(1 + \frac{K_{64}}{q_o+1}\right).....\left(1 + \frac{K_{64}}{q}\right) \quad \text{für } q \geq q_o+1$$

$$C_q = K(q_o) \quad \text{für } q = 0,\ldots,q_o \quad ,$$

mit einer Konstanten $K(q_o)$, die nur von $\bar{C}_o$ abhängt. Berücksichtigen wir die in den vorstehenden Abschätzungen verwendeten Beziehungen (8.353),(8.362) und (8.363), so folgt schließlich:

$$(8.380)\quad \left| D^r(\tilde{N}^{-1}m)^q f(x)_{/x=0} \right| \leq K_{65} \cdot q^{K_{64}} C^{q(n-p)+\bar{r}} (q(n-p)+\bar{r})!$$

$$\text{für } q \geq 1;\ r = 0,1,2,\ldots;\ \bar{r} := \max(r,n-1),$$

mit Konstanten K_{64} und K_{65}, die nur von C abhängen.
Beweis: Wir betrachten das Produkt in (8.379):

$$(8.381)\quad \prod_{k=q_o+1}^{q} \left(1 + \frac{K_{64}}{k}\right) = \prod_{k=q_o+1}^{q} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \prod_{k=q_o+1}^{q} \left(1 + \frac{K_{64}^{-1}}{k+1}\right) =$$

$$= \frac{q+1}{q_o+1} \prod_{k=q_o+1}^{q} \left(1 + \frac{K_{64}^{-1}}{k+1}\right) = \frac{q+1}{q_o+1} \cdots \frac{q+t}{q_o+t} \prod_{k=q_o+1}^{q} \left(1 + \frac{K_{64}^{-t}}{k+t}\right) = \ ^{1)}$$

$$= \prod_{j=1}^{K_{64}} \frac{q+j}{q_o+j} \leq K_{66}(C)\, q^{K_{64}(C)} \quad .-$$

Nun können wir den Konvergenzradius der $\tilde{N}^{-1}m$-Taylorreihe ab-

---

$^{1)}$ O.B.d.A. sei $K_{64} \in \mathbb{Z}$.

schätzen: aus (8.380) folgt für die Taylorkoeffizienten (6.125):

$$(8.382)\qquad |\tilde{a}_\mu| \le K_{65}\cdot q^{K_{64}\cdot C^{q(n-p)+n-1}}\cdot (q(n-p)+n-1)!$$

für alle $\mu \ge n-p$, ($\mu := q(n-p)+r$),

und damit für den Konvergenzradius nach (6.124):

$$(8.383)\qquad \tilde{R}^{-1} \le \lim_{\mu\to\infty}\left(K_{65}^{\frac{1}{\mu}}\cdot q^{K_{64}\frac{1}{\mu}}\cdot C^{\frac{\mu+n-1-r}{\mu}}\cdot\frac{(\mu+n-1-r)!}{\mu!}\right) =$$

$$= C < \frac{1}{a} \quad \text{(nach (8.362))};$$

damit ist Hilfssatz 7.6 vollständig bewiesen.-

Beweis von Satz 7.4: Wir brauchen nur die Äquivalenz der Aussagen 2) und 3) zu zeigen: sei zunächst f(z) in $|z|<R$ holomorph. Dann folgt nach Hilfssatz 7.6 die Entwicklung (7.73) für $\tilde{R} \ge R$. Umgekehrt sei nun die Aussage 3) erfüllt. Dann folgt aus Satz 4.1, daß f(x) reell-analytisch auf $[0,R)\cap[0,1]$ ist, bzw. daß die gewöhnliche Taylorreihenentwicklung (7.77) gilt.-

Beweis von Satz 7.5: Die Aussage (i) ist eine direkte Folge der Holomorphie von f(z) im Polygon nach Satz 4.1; untersuchen wir das Polygon auf den größtmöglichen "Inkreisradius" um z = 0, so erhalten wir $x_1\cdot\cos(\frac{n-m}{n-p}\tilde{\pi})$, woraus (7.78) folgt.-

Literaturverzeichnis:

[1] Eberhard,W.: Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen. Math.Z. 86(1964),S.45-53.

[2] Eberhard,W.: Die Entwicklungen nach Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen. Math.Z. 86(1964),S.2o5-214.

[3] Eberhard,W.: Die Entwicklungen nach Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen II. Math.Z. 9o(1965),S.126-137.

[4] Eberhard,W.: Über Summierbarkeitsfragen bei verallgemeinerten Fourier-Reihen. Jahresber.d.DMV 68(1966),S.144-154.

[5] Eberhard,W.: Über das asymptotische Verhalten von Lösungen der linearen Differentialgleichung $M(y) = \lambda N(y)$ für große Werte von $|\lambda|$. Math.Z. 119(1971),S.16o-17o.

[6] Eberhard,W.: Über Eigenwerte und Eigenfunktionen einer Klasse von nichtselbstadjungierten Randwertproblemen. Math.Z. 119(1971),S.171-178.

[7] Eberhard,W.; Freiling,G.: Nicht-S-hermitesche Rand- und Eigenwertprobleme. Math.Z. 133(1973),S.187-2o2.

[8] Eberhard,W.; Freiling,G.: Das Verhalten der Greenschen Matrix und der Entwicklungen nach Eigenfunktionen N-regulärer Eigenwertprobleme. Math.Z. 136(1974),S.13-3o.

[9] Eberhard,W.: Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme. Math.Z. 146(1976),S.213-221.

[1o] Neumark,M.A.: Lineare Differentialoperatoren. Akademie-Verlag, Berlin 1967.

[11] Fage,M.K.: Operatorno-analititscheskije funkzii odnoi nesawisimoi peremennoi. Trudui Mosk. matem. obschtschestwa, Tom 7(1958),S.227-268.

[12] Kromow,A.P.: Rasložénije po sobstwennuim funkzijam obuiknowennuich lineinuich differenzialnuich operatorow s nereguljarnuimi raspadajuschtschimisja krajewuimi uslowijami. Matematitscheskii Sbornik, Tom 7o(112)(1966),No 3(7), S.31o-329.

[13] Birkhoff,G.D.: On the asymptotic charakter of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. Trans.Amer.math.Soc. 9(1908),S.219-231.

[14] Birkhoff,G.D.: Boundary value and expansion problems of ordinary differential equations. Trans.Amer.math.Soc. 9 (1908),S.373-395.

[15] Stone,M.H.: A comparison of the series of Fourier and Birkhoff. Trans.Amer.math.Soc. 28(1926),S.695-761.

[16] Tamarkin,J.D.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions. Math.Z. 27(1927),S.1-54.

Herrn Professor Dr. Walter Eberhard danke ich für die
Überlassung des Themas und für Anregungen zu dieser Arbeit.

Lebenslauf

Am 16.3.1949 wurde ich, Manfred Wolter, in Neustadt/Holst. als Sohn des Dozenten Dr. Hans Karl Hermann Wolter und seiner Ehefrau Edith Elisabeth Wolter, geb. Spieckermann, geboren.

Von Ostern 1955 bis Ostern 1959 besuchte ich die Volksschule, zunächst die Hardenberg-Schule in Kiel, ab 1956 die Brüder-Grimm-Schule in Marburg, wo ich am 22.6.1967 das Abitur an der Martin-Luther-Schule, Realgymnasium für Jungen, bestand.

Im Wintersemester 1967/68 nahm ich an der Philipps-Universität Marburg das Studium der Physik und Mathematik auf. Seit der Ablegung der Diplom-Vorprüfungen in diesen Fächern am 13.10.1969 bzw. am 22.10.1969 war ich am Fachbereich Mathematik als Studentischer Tutor und Wissenschaftliche Hilfskraft beschäftigt. Im Oktober 1971 bestand ich die mündliche Diplom-Hauptprüfung in Mathematik, und im März 1974 beendete ich meine Diplomarbeit über selbstadjungierte Rand-Eigenwertprobleme. In der Zwischenzeit war ich von 1973 bis 1974 als Wissenschaftliche Hilfskraft am Fachbereich Mathematik der Universität des Saarlandes tätig, wo ich das Studium der Volkswirtschaftslehre begann. Dies setzte ich während meiner anschließenden Tätigkeit als Akademischer Tutor am Fachbereich Mathematik der Philipps-Universität Marburg in den Jahren 1974 bis 1976 fort.

Nachdem ich vom August 1976 bis zum Januar 1977 am Statistischen Bundesamt in Wiesbaden als Wissenschaftlicher Mitarbeiter beschäftigt gewesen bin, bin ich seit dem 1.2.1977 Studienreferendar am Studienseminar Marburg, wo ich am 5.6.1978 die Zweite Staatsprüfung ablegte.